

Esercitazione del 23/4/2025

Es:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ \alpha & \text{se } i=1, j=n \\ -\frac{1}{2} & \text{se } i=j+1, j=1 \dots n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$j=i-1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \alpha \\ -\frac{1}{2} & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

① Pred. diagonale

$$\left. \begin{array}{l} r_1: |1| > |\alpha| \\ r_2: r_n: |1| > |-\frac{1}{2}| \end{array} \right\} \vee \quad -1 < \alpha < 1$$

Anche se A non è simmetrica le condizioni di pred. diagonale per righe o colonne sono le stesse

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \dots c_{n-1}: |1| > |-\frac{1}{2}| \\ c_n: |1| > |\alpha| \end{array} \right\} \quad -1 < \alpha < 1$$

② Metodo di Gauss-Seidel

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G = M^{-1}N$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & g_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & g_{n,n} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1}$
 $\quad \quad \quad g$

$$Mg = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n \\ -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1,n} \\ g_{2,n} \\ \vdots \\ g_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot g_{1,n} = -d \quad g_{1,n} = -d$$

$$-\frac{1}{2} \cdot g_{1,n} + g_{2,n} = 0 \Rightarrow g_{2,n} = \frac{1}{2} g_{1,n} = -\frac{d}{2}$$

$$-\frac{1}{2} g_{2,n} + g_{3,n} = 0 \Rightarrow g_{3,n} = \frac{1}{2} g_{2,n} = -\frac{d}{2^2}$$

$\vdots$

$$-\frac{1}{2} g_{k-1,n} + g_{k,n} = 0 \Rightarrow g_{k,n} = \frac{1}{2} g_{k-1,n} = -\frac{d}{2^{k-1}}$$

$\vdots$

$$-\frac{1}{2} g_{n-1,n} + g_{n,n} = 0 \Rightarrow g_{n,n} = -\frac{d}{2^{n-1}}$$

$$g = \begin{pmatrix} -d \\ -\frac{d}{2} \\ \vdots \\ -\frac{d}{2^{k-1}} \\ \vdots \\ -\frac{d}{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$Mg = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$G = \begin{pmatrix} \circ & & -d \\ & \ddots & -\frac{d}{2} \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{-\frac{d}{2^{n-1}}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

Nota che G è triangolare superiore quindi i suoi autovalori sono gli elementi diagonali e

$$\lambda_n = -\frac{d}{2^{n-1}}$$

$$\rho(G) = \frac{|\alpha|}{2^{n-1}}$$

$$\rho(G) < 1 \quad |\alpha| < 2^{n-1}$$

$$-2^{n-1} < \alpha < 2^{n-1}$$

③ Jacobi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & -\alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & \\ & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & & -\alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & \\ & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Cerca gli autovalori di J / Laplace

NB: Non posso applicare Gauss ad una matrice per calcolare gli autovalori perché le operazioni di Gauss non mantengono gli autovalori.

es: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha come autovalori $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(A) = 1 \\ \lambda_2 = 2 \Leftrightarrow \text{tr}(A) = 2 \neq \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha come autovalori 0 e 1 che non sono gli stessi di A

le operazioni che mantengono gli autovalori sono quelle per similitudine

S invertibile

$$B = SAS^{-1}$$

B e A hanno gli stessi autovalori.

Pero posso utilizzare Gauss e la fatt. LU per determinare il polinomio caratteristico $\det(J - \lambda I)$

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & & & -\alpha \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\frac{1}{2\lambda} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \beta \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$z^T \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$z_1 = z_2 = \dots = z_{n-2} = 0$$

$$-\lambda z_{n-1} = \frac{1}{2} \quad z_{n-1} = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$z^T = \left(0, \dots, 0, -\frac{1}{2\lambda} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2\lambda} & 1 & & \\ & -\frac{1}{2\lambda} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{1}{2\lambda} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -\alpha$$

$$-\frac{1}{2\lambda} y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2\lambda} y_1$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{2\lambda} y_{k-1} + y_k = 0 \Rightarrow y_k = \frac{1}{2\lambda} y_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{2\lambda} y_{n-2} + y_{n-1} = 0 \Rightarrow y_{n-1} = \frac{1}{2\lambda} y_{n-2}$$

$$y = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ -\frac{\alpha}{(2\lambda)^2} \\ \vdots \\ -\frac{\alpha}{(2\lambda)^{n-2}} \end{pmatrix}$$

$$z^T y + 1 \cdot \beta = -\lambda \quad \beta = -\lambda - z^T y$$

$$\beta = -\lambda - \frac{\alpha}{(2\lambda)^{n-1}}$$

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2\lambda} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & -\frac{1}{2\lambda} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\lambda & \\ & & & -\lambda - \frac{2}{(2\lambda)^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-\lambda)^{n-1} \cdot \left(-\lambda - \frac{2}{(2\lambda)^{n-1}} \right) = 0$$

Poiché $\lambda \neq 0$ $\left(-\lambda - \frac{2}{(2\lambda)^{n-1}} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{2}{(2\lambda)^{n-1}} = 0$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} \lambda^n + 2 = 0$$

$$\lambda^n = -\frac{2}{2^{n-1}}$$

è a meno di $\frac{1}{n}$
le potenze
cost. di J che
hanno con Laplace

$$|\lambda| = \left| \left(\frac{2}{2^{n-1}} \right)^{1/n} \right|$$

$$\rho(J) = \frac{|2|^{1/n}}{2^{n-1}}$$

$$\rho(J) < 1$$

$$|2|^{1/n} < 2^{n-1}$$

$$|2| < 2^{n-1}$$

si nota che $\rho(J) = \rho(G)^{1/n}$

$$\frac{|2|^{1/n}}{2^{n-1}} \quad \frac{|2|}{2^{n-1}}$$

entrambi convergono a 0 e $|2| < 2^{n-1}$
chi converge più velocemente cioè ha rapporti
spettrali più piccoli?

$$\frac{|2|^{1/n}}{2^{n-1}} < \frac{|2|}{2^{n-1}} \quad \text{Sì!}$$

quindi Jacobi converge più velocemente di G.S.

④ Per $d=2$ si determini $P=G^2$ dove G è la matrice di G.S. si determini le lode de

$$\frac{\|e_k\|_\infty}{\|e\|_\infty} \leq 2^{-S_3}$$

$$e_k = G^k e_0$$

$$\|e_k\|_\infty = \|G^k e_0\|_\infty \leq \underbrace{\|G^k\|_\infty}_{\substack{\text{comp. no} \\ \text{norme}}} \|e_0\|_\infty$$

$$G = \begin{pmatrix} & & & g \\ & & & g_{2n} \\ & & & \vdots \\ & & & g_m \\ & & & \end{pmatrix} = g e_n^T$$

$$\begin{aligned} g_{1n} &= -\alpha \\ g_{2n} &= -\frac{\alpha}{2} \\ &\vdots \\ g_{mn} &= -\frac{\alpha}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$$G^2 = \underbrace{g e_n^T g}_{(0 \dots 0 \ 1)} e_n^T = \frac{-\alpha}{2^{n-1}} (g e_n^T) = \underbrace{\left(\frac{-\alpha}{2^{n-1}} \right)}_{\beta} G$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \vdots \\ -\frac{\alpha}{2^{n-1}} \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

$$G^3 = G \cdot G^2 = G \cdot \beta \cdot G = \beta \cdot G \cdot G = \beta G^2 = \beta^2 G$$

$$\vdots$$

$$G^k = \beta^{k-1} \cdot G$$

$$\|G^k\|_\infty = \|\beta^{k-1} G\|_\infty = \underbrace{|\beta|^{k-1}}_{\frac{|\alpha|}{2^{n-1}}} \|G\|_\infty = \frac{|\alpha|^{k-1}}{2^{(n-1)(k-1)}} |\alpha| = \frac{|\alpha|^k}{2^{(n-1)(k-1)}}$$

$$\max \left\{ |\alpha|, \frac{|\alpha|}{2}, \dots, \frac{|\alpha|}{2^{n-1}} \right\} = |\alpha|$$

$$\|e_k\|_\infty \leq \frac{|d|^k}{2^{(n-1)k}} \cdot \|e_0\|_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{\|e_k\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} \leq \frac{|d|^k}{2^{(n-1)k}} < 2^{-53} \quad \text{for } e \text{ conto su } u \text{ con } d=2$$

⑤ Implementare in Matlab un passo del metodo di GS.

$$i=1 \dots n \quad x_i^{(u+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(u+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(u)} \right]$$

$i=1$

$$x_1^{(u+1)} = \frac{1}{1} \left[b_1 - d x_n^{(u)} \right]$$

$i=2$

$$x_2^{(u+1)} = \frac{1}{1} \left[b_2 + \frac{1}{2} x_1^{(u+1)} \right]$$

$$x_i^{(u+1)} = \frac{1}{1} \left[b_i + \frac{1}{2} x_{i-1}^{(u+1)} \right] \quad i=2 \dots n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad d$$

function $x_{\text{new}} = \text{GS_step}(b, x_k, \alpha)$

$n = \text{length}(b);$

$x_{\text{new}} = \text{zeros}(n, 1)$

$x_{\text{new}}(1) = b(1) - \alpha * x_k(n);$

for $i=2:n$

$x_{\text{new}}(i) = b(i) + x_{\text{new}}(i-1)/2;$

end

} 2n flops

Es 2

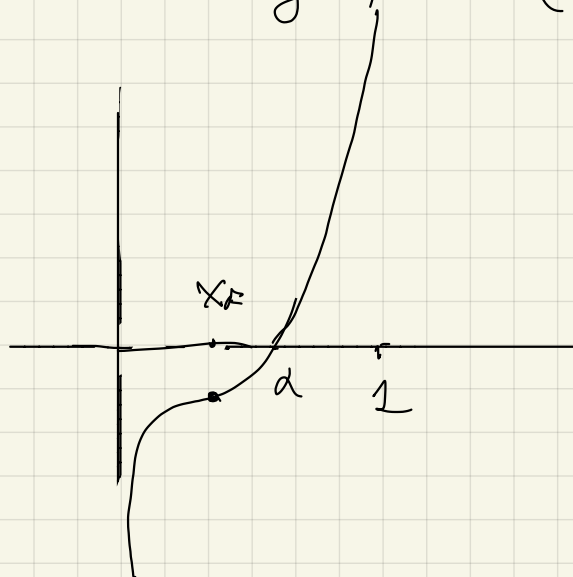
$$f(x) = x^3 + \log x = 0$$

$$x^3 = -\log x$$

① soluzione?

② Molt

③ $x = g(x)$ con $g(x) = -(\log x)^{1/3}$



$$x > 0$$

$$0 < a < 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} > 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $f(1) = 1 > 0$

} almeno 1 soluzione

poiché $f'(x) > 0$ cioè f è crescente
 ha esattamente una soluzione

$$f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{6x^3 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x_F = \left(\frac{1}{6}\right)^{1/3}$$

$$a > x_F$$

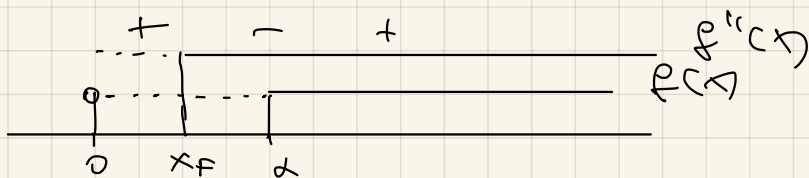
$$f(x_F) = x_F^3 + \log x_F = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \log\left(\frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \log 6 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \log 6 \right) < 0$$

② poiché $f'(x) > 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow f'(x) \neq 0 \Rightarrow x$ è radice semplice e quindi la Holt converge localmente con ordine esattamente 2 poiché $f''(x) \neq 0$

Per quanto riguarda la convergenza in largo dobbiamo studiare il segno di $f(x)$ e di $f''(x)$ e vedere se c'è un intervallo destro o sinistro di x per cui f e f'' sono concordi in segno
si nota che



quindi: $S = (x_f, +\infty)$

$\forall x \in S$

$$f'(x) \neq 0$$

$$f(x) f''(x) > 0$$

si nota che sebbene su $(0, x_f)$ sono verificate le due proprietà precedenti, non è un intervallo al quale può essere applicato il teo di

convergenza in luogo poiché non è un intervallo del tipo richiesto (destro o sinistro di α)

per ogni $x_0 \in S = (\alpha, +\infty) \Rightarrow x_n \in S$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

L'intervallo di convergenza può essere esteso a $(x_f, +\infty)$ infatti se $x_0 \in (x_f, \alpha) \Rightarrow x_n \in S$

$$\textcircled{3} \quad g(x) = -(\log x)^{1/3}$$

$$x = -(\log x)^{1/3} \Leftrightarrow x^3 = (-1)^3 \cdot \log x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = -\log x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Per studiare la convergenza locale è sufficiente la valuet $|g'(\alpha)|$. In particolare,

se $|g'(\alpha)| < 1$ ho convergenza locale

$$g'(x) = -\frac{1}{3} (\log x)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow |g'(\alpha)| = \left| \frac{1}{3} \frac{1}{(\log \alpha)^{2/3}} \cdot \frac{1}{\alpha} \right|$$

poiché α è punto fisso $\alpha = -(\log \alpha)^{1/3} \Rightarrow$

$$(\log \alpha)^{2/3} = \alpha^2 \Rightarrow |g'(\alpha)| = \left| \frac{1}{3\alpha^3} \right|$$

Quindi almeno convergente e

$$\frac{1}{|3\alpha^3|} < 1 \Leftrightarrow |\alpha^3| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow |\alpha| > \frac{1}{(3)^{1/3}}$$

Perché f è crescente per cui verificare che
 $\alpha > \frac{1}{3^{1/3}}$ semplicemente notando che $f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}\right) < 0$

$$f\left(\frac{1}{3^{1/3}}\right) = \frac{1}{3} + \log\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log 3 < 0$$

Quindi il metodo è localmente convergente.

L'ordine di convergenza è 1 perché $g'(\alpha) \neq 0$.