Calcolo Numerico

Soluzioni del Foglio di Esercizi

Gianna Del Corso <gianna.delcorso@unipi.it>

Aprile 2023

Lo studente che consegnerà gli esercizi assegnati durante l'anno e dimostrerà in sede di orale di averli svolti in sufficiente autonomia può aumentare il voto della prova orale fino a 3 punti in uno degli appelli dell'anno accademico 2017/18.

Esercizio 1. È data la funzione

$$f(x) = \log(x) + 2x - 1$$

- (a) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale α .
- (b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alla soluzione di $f(x) = 0$.
- (c) Sia $g(x) = f(1/x)$. Si dimostri che l'equazione $g(x) = 0$ ha come soluzione $1/\alpha$, e si dimostri che il metodo delle tangenti applicato a $g(x)$ risulta convergente per ogni $x_0 \in (0, 1/\alpha]$.
- (d) Scrivere una funzione Matlab `function [x, k]=tangenti(x0,tol)` che implementa il metodo delle tangenti applicato alla risoluzione dell'equazione $g(x) = 0$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| \leq tol$.
- (e) Per $x_0 = 1$ e $tol \in \{10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-12}\}$ si riporti il numero di iterazioni eseguite. Si faccia la stessa prova a partire da $x_0 = e$ e si dica, motivando la risposta, se la convergenza può essere dimostrata per via teorica.
- (f) Per $x_0 = e^2, tol = 10^{-4}$ si giustifichino dal punto di vista teorico i risultati sperimentali.

Soluzione 1. (a) La funzione è definita solo per $x > 0$. $f'(x) = 1/x + 2 > 0$ per ogni $x > 0$ quindi la funzione è crescente. Esiste allora una sola soluzione poichè $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $f(1) = 1 > 0$. Denotando con α tale radice abbiamo quindi $\alpha \in [1/2, 1]$.

- (b) Le condizioni del teorema di convergenza in largo sono verificate per ogni $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha]$ con $\rho > \alpha$. Convergo anche partendo da destra della soluzione fino ad un punto b tale che, se scelgo $x_0 = b$ $x_1 = 0$. Infatti ogni punto $x_0 > b$ è tale che $x_1 < 0$ e quindi sono fuori dal campo di esistenza della funzione.
- (c) $g(x) = \log(1/x) + 2/x - 1 = -\log(x) + 2/x - 1$. Quindi $g(1/\alpha) = \log(\alpha) + 2\alpha - 1 = 0$. $1/\alpha \in [1, 2]$. Si nota che $g(x)$ è definita per $x > 0$. Inoltre è decrescente poichè $g'(x) = -1/x - 2/x^2 - 1 < 0$. $g''(x) = 1/x^2 + 4/x^3 > 0$. Per il teorema di convergenza in largo abbiamo convergenza a $1/\alpha$ per ogni $x_0 \in (0, 1/\alpha]$.
- (d)

```
function [x, k] = tangenti(x0, tol)
    g=@(x) log(1./x)+2/x-1
    g1=@(x) -1/x-2/x^2
    h=@(x) x-g(x)/g1(x)
    k=0
    err=inf
    while err>tol
        x=h(x0)
        err=abs(x-x0);
        k=k+1;
        x0=x;
    end
end
```

- (e) Per $x_0 = 1$ otteniamo i seguenti risultati : $tol = 10^{-4}$, $x = 1.454733216849253$, $k = 4$, per $tol = 10^{-6}$, $x = 1.454733217561065$, $k = 5$, $tol = 10^{-12}$, $x = 1.454733217561065$ e $k = 6$. Anche a partire da $x_0 = e$ abbiamo convergenza. Infatti $x_1 \in (0, 1/\alpha]$ e da ogni punto in $(0, 1/\alpha]$ ho convergenza assicurata dal teorema di convergenza in largo.
- (f) Partendo da $x_0 = e^2$ non abbiamo convergenza poichè $x_1 < 0$ e la funzione non è definita per $x < 0$.

Esercizio 2. Sia $g(x) \in C^1[a, b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \in [a, b]$. Si assuma inoltre che $1/3 \leq g'(x) \leq 1/2$ per ogni $x \in [a, b]$.

- (a) Si dimostri che per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione definita da $x_{i+1} = g(x_i)$, per $i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$ risulta monotona convergente ad α . In particolare che la successione risulta monotona crescente se $x_0 < \alpha$ e monotona decrescente se $x_0 > \alpha$.
- (b) Si determini il valore di k per cui, per ogni $x_0 \in [a, b]$ si ha $|x_k - \alpha| \leq |b - a|10^{-8}$.

Soluzione 2. (a) Occorre dimostrare che se $x_0 < \alpha$, ogni $x_i = g(x_{i-1}) \in [a, b]$ e che $\alpha > x_i > x_{i-1}$, $i > 1$. Viceversa scegliendo $x_0 > \alpha$, ogni $x_i = g(x_{i-1}) \in [a, b]$ e che $\alpha < x_i < x_{i-1}$, $i > 1$. La dimostrazione è per induzione su i . Facciamo

solo il caso $x_0 < \alpha$, l'altro è analogo. Per $i = 0$ la tesi è vera per ipotesi. Assumiamo che la tesi valga per i e dimostriamo per $i + 1$ $x_{i+1} = g(x_i)$, vale $\alpha - x_{i+1} = g(\alpha) - g(x_i) = g'(\xi_i)(\alpha - x_i)$, con $|\xi_i - \alpha| < |x_i - \alpha|$. Per ipotesi induttiva $\alpha - x_i > 0$ Poichè $\xi_i \in [a, b]$ e $1/3 < g'(x) < 1/2$ per ogni $x \in [a, b]$ abbiamo che $\alpha - x_{i+1} > 1/4(\alpha - x_i) > 0$ quindi la successione non supera il punto α . Inoltre poichè $g(x)$ risulta crescente $x_{i+1} = g(x_i) > g(x_{i-1}) = x_i$ dove è stata usata l'ipotesi induttiva $x_i > x_{i-1}$.

- (b) Posto $\lambda = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| = 1/2$. Allora $|x_k - \alpha| \leq \lambda^k |x_0 - \alpha| < \lambda^k (b - a) = (b - a)/2^k$. Abbiamo la tesi per $k \geq \lceil 8 \log_2(10) \rceil = 27$.

Esercizio 3. Sia $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$, con $a > 0$.

- (a) Si verifichi che $\sqrt{a}$ è punto fisso di $g(x)$.
 (b) Si dica se il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ risulta convergente al punto fisso.

Soluzione 3. (a) I punti fissi sono $\pm\sqrt{a}$. Poichè la funzione è dispari possiamo studiare la convergenza solo alla soluzione $\sqrt{a}$.

- (b) Abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ Per $x > \sqrt{a}$ la funzione rimane sempre limitata dalla retta $y = x$ poichè ha come asintoto obliquo la retta $y = 1/2x$. Si nota che $g'(\sqrt{a}) = 0$, da cui abbiamo che il metodo risulta localmente convergente con ordine di convergenza 2. Per $x > \alpha$ abbiamo $0 < g'(x) < 1$ quindi la convergenza è di tipo monotono decrescente ed è assicurata partendo da un qualsiasi $x_0 > \alpha$. Per $x_0 \in (0, \alpha]$ poichè $g'(x) < 0$, $x_1 > \alpha$ e da qui convergo per le considerazioni precedenti.

Esercizio 4. È data la funzione

$$f(x) = e^{-x} - 2x^2$$

- (a) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni e se ne diano gli intervalli di separazione.
 (b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni.
 c) Si dica se l'equazione $x = g(x)$ con

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2x}$$

è equivalente e se ne studi la convergenza locale.

Soluzione 4. (a) Abbiamo che $f'(x) = -e^{-x} - 4x$. Con un ragionamento di separazione grafica abbiamo che $f'(x) = 0$ per due valori x_m, x_M rispettivamente punto di minimo e di massimo di $f(x)$. Inoltre vale che $-3 \leq x_m \leq -2$ e che $-1 \leq x_M \leq 0$. La funzione $f(x)$ risulta quindi decrescente per $x < x_m$ e per $x > x_M$ mentre è crescente per $x_m < x < x_M$. Analizzando la derivata seconda si trova che $f(x)$ ha un flesso nel punto $x_F = -\log(4)$ ed in tale valore $f(x_F) > 0$. La

continuità di $f(x)$, il fatto che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ed $f(x_m) < 0$ ci assicurano che esiste $\alpha < x_m$ tale che $f(\alpha) = 0$. Si verifica inoltre che $-3 < \alpha < x_m < -2$. Similmente poichè $f(x_M) > 0$ la f si annulla anche in un punto $\beta \in (-2, -1)$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ da cui abbiamo che esiste $\gamma > 0$ tale che $f(\gamma) = 0$. Si verifica che $\gamma \in (0, 1)$. Notiamo inoltre che $\beta \leq x_F$.

- b) Dal teorema di convergenza in largo la convergenza ad α è garantita per ogni $x_0 \in S_\alpha = (-\infty, \alpha)$. Si nota che se scegliamo $x_0 \leq x_m$ abbiamo comunque convergenza ad α poichè se $x_0 \in [\alpha, x_m]$, $x_1 \in S_\alpha$ e quindi la successione inizia a convergere in modo monotono. Lo stesso discorso può essere fatto per la convergenza a γ . Si converge a γ scegliendo $x_0 > x_M$. Sempre per il teorema di convergenza in largo abbiamo convergenza a β per ogni $x_0 \in [\beta, x_F)$. Sappiamo anche che dal teorema del punto fisso, poichè β è radice semplice esistono anche punti a sinistra di β dai quali abbiamo convergenza. Dovremmo scegliere tutti i punti $x_F > x_0 > x_L$ tali che $x_1 < x_F$. L'ordine di convergenza è 2.

L'equazione $f(x) = 0$ e $x = g(x)$ sono equivalenti infatti $x = 0$ non è una soluzione di $f(x) = 0$ e $x = e^{-x}/(2x)$ se e solo se $2x^2 = e^{-x}$. Per la convergenza locale abbiamo bisogno di stimare $g'(x)$ nei tre punti fissi. $g'(x) = \frac{-(1+x)e^{-x}}{2x^2}$, e $g'(x) = 0$ per $x = -1$, quindi $g(x)$ è decrescente per $x < -1$ e crescente per $x > -1$. Abbiamo inoltre $g''(x) > 0$ per $x > 0$ e $g''(x) < 0$ per $x < 0$. La funzione ha un asintoto in 0.

Si nota che nei punti fissi $\phi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ abbiamo che possiamo utilizzare il fatto che $e^\phi = 2\phi^2$, da cui abbiamo che $g'(\phi) = -(1 + \phi)$. Da cui abbiamo che $|g'(\phi)| < 1$ se e solo se $|1 + \phi| < 1$ cioè $\phi \in (-2, 0)$ che è verificato solo per la radice β . da cui abbiamo convergenza β ma non ad α o γ .