Soluzioni della simulazione della seconda prova parziale

Esercizio 1. Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definita da

$$A_n = I_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_n^T + \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{x}^T,$$

dove I_n è la matrice identità di ordine n, $\boldsymbol{e}_n$ è la sua colonna $n-$esima e $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_{n-1}, 0] \in \mathbb{R}^n$.

1. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A_n è convergente se $\| \boldsymbol{x} \|_1 < 1$.
2. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A_n è convergente se e sole se $\| \boldsymbol{x} \|_2 < 1$.
3. Si mostri che vale $\| \boldsymbol{x} \|_2 \leq \| \boldsymbol{x} \|_1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si mostri che non vale $\| \boldsymbol{x} \|_1 \leq \| \boldsymbol{x} \|_2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. Si scriva una function MatLab che dati in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ restituisce il vettore $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ generato da un'iterazione del metodo di Gauss-Seidel con punto iniziale $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ applicato per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & x_1 \\ & & x_2 \\ & 0 & \vdots \\ & & x_{n-1} \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & & \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \quad 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & x_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

① Se $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| < 1 \Rightarrow$ GS è convergente poiché A risulta a predominanza diagonale

② $\|x\|_2 < 1 \Leftrightarrow$ GS è convergente

Intanto $\|x\|_2 < 1 \Leftrightarrow \|x\|_2^2 < 1$ cioè $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1$

Costruisco la matrice di iterazione di G.S.

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ x_1 & x_2 & \cdots\, x_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{M} \cdot \begin{bmatrix} & & -x_1 \\ & & -x_2 \\ & 0 & \vdots \\ & & -x_{n-1} \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bigg| & g \end{bmatrix}$$

dove g: $\quad M g = -x$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ x_1\, x_2 \cdots x_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \hline g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad g_1 = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(x_1 \cdots x_{n-1})\, g_1 + g_n = 0$$

$$\Rightarrow g_n = -(x_1 \cdots x_{n-1}) \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} & -x_1 \\ 0 & \vdots \\ & -x_{n-1} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

Il metodo di GS è convergente $\Leftrightarrow$ $\rho(G) < 1$

poiché G è triangolare superiore i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale - si nota che $\rho(G) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \rho(G) < 1 \Leftrightarrow$

$$\|x\|_2^2 < 1 \Leftrightarrow \|x\|_2 < 1$$

③ Per dimostrare che $\|x\|_2 < \|x\|_1$ si utilizza la definizione

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < \sum |x_i| \iff$$ tutte quantità ≥ 0

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum |x_i|^2 + \underbrace{\sum_{i \neq j} |x_i||x_j|}_{\geq 0}$$

Per dimostrare il viceversa basta produrre un contro esempio.

Es $n = 2$ $\quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{2} \qquad \|x\|_1 = 2$$

$$\|x\|_1 > \|x\|_2$$

④ Per il metodo di GS vale (indicando le iterate con y per non confondersi con le proprietà x)

$$y_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j^{(k)} \right]$$

Nel caso della nostra matrice abbiamo

per $i = 1 : n-1$

$$y_i^{(k+1)} = b_i - x_i \cdot y_j^{(k)}$$

per $i = n$

$$y_n^{(k+1)} = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} x_j \, y_j^{(k+1)}$$

Abbiamo quindi il seguente codice Matlab ricordando che $y_0 = x_i$

```
Fuction  y = GS_step( b, x )

    n = lenght (b);
    y = zeros (n, 1);
    for i = 1:n-1
        y(i) = b(i) - X(i)* X(j);
    end

    s = 0;

    for j = 1:n-1
        s = X(j)* y(j)+ s;
    end

    y(n) = b(n) - s;

end
```

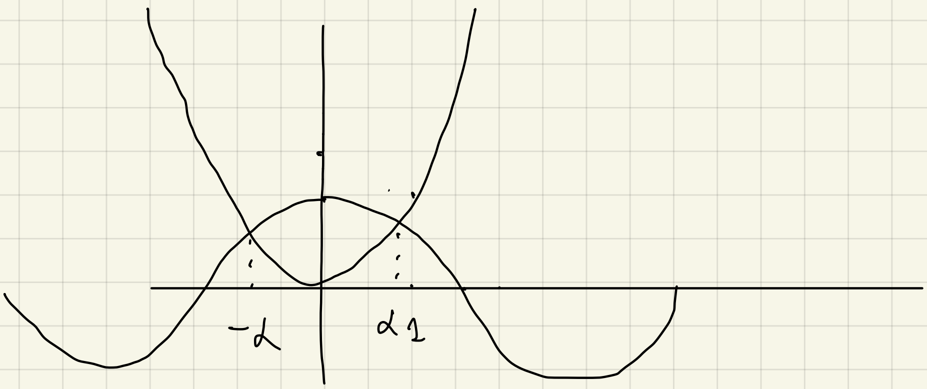
Esercizio 2 È data la funzione
$$f(x) = x^2 - \cos(x).$$

(a) Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$.

(b) Si studi la convergenza (compresa scelta del punto iniziale e ordine di convergenza) del metodo delle tangenti per l'approssimazione delle soluzioni.

(c) Si studi la convergenza del metodo iterativo
$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{\cos x}{x}$$
alle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Facciamo la separazione grafica $x^2 = \cos x$



Ci sono due soluzioni reali $\alpha, -\alpha$ con $0 < \alpha < 1$.

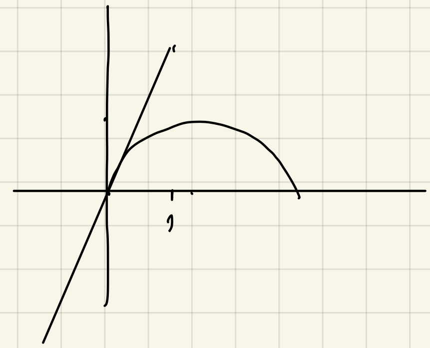
Non possono esistere altre soluzioni in modulo maggiori di 1 perché $|\cos x| < 1$ mentre $x^2 > 1$ se $|x| > 1$

② $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = f(-x)$ infatti $f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) =$

$= x^2 - \cos x$

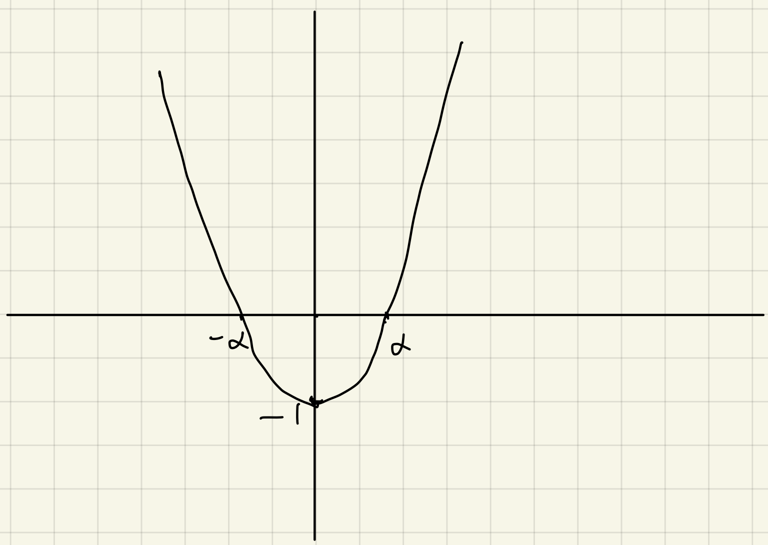
$f'(x) = 2x + \sin x = 0$



$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 - \cos(0) = -1$

$f''(x) = 2 + \cos x > 0$ per ogni x



Le radici sono semplici quindi abbiamo conv. locale di ordine 2 (poiché $f''(\alpha) \neq 0$ e $f''(-\alpha) \neq 0$)

Per quanto riguarda la convergenza in largo abbiamo che $S = (\alpha, +\infty)$ vale $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in S$ e

$f(x) f''(x) > 0 \ \forall x \in S$

$\Rightarrow$ Per ogni $x_0 \in S \Rightarrow \{x_n\} \to \alpha$ in modo monotono.

In realtà scegliendo $x_0 \in (0, \alpha) \Rightarrow x_1 \in S$ e poi converge in modo monotono ad S.

Similmente: $\forall x_0 \in (-\infty, -\alpha) \Rightarrow \{x_k\} \to -\alpha$ in modo monotono crescente.

Si può scegliere anche $x_0 \in (-\alpha, 0)$ poiché $x_1 \in (-\infty, -\alpha)$ e da qui poi converge in modo monotono.

(3) $\quad g(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

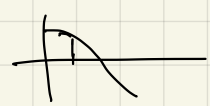
equivalente $\quad g(x) = x \iff \dfrac{\cos x}{x} = x \iff \cos x = x^2$

$\iff x^2 - \cos x = 0 \iff f(x) = 0$

Per studiare la convergenza locale basta vedere se $|g'(\alpha)| < 1$ o $|g'(-\alpha)| < 1$ per la radice negativa

$$g'(x) = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

$$g'(\alpha) = -\underset{\vee \atop 0}{\frac{\sin \alpha}{\alpha}} - \underset{\shortparallel \atop 1}{\boxed{\frac{\cos \alpha}{\alpha^2}}} < -1$$ non ho quindi convergenza



$$g'(-\alpha) = -\frac{\sin(-\alpha)(-\alpha)}{\alpha^2} - \frac{\cos(-\alpha)}{(-\alpha)^2} = -\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} - \underset{\shortparallel \atop 1}{\boxed{\frac{\cos(\alpha)}{\alpha^2}}}$$