

Cognome	Nome	Matricola	Firma
---------	------	-----------	-------

Corso di Laurea in Informatica
PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

Compito 05/05/2025

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, con la seguente struttura

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 \\ -\alpha & 2 & & & \alpha - 2 \\ & -\alpha & 3 & & \alpha - 3 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & -\alpha & n-1 & \alpha - n + 1 \\ & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si mostri che non esistono valori del parametro α per cui A risulta a predominanza diagonale.
2. Si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare del parametro α .
3. Per $\alpha = 1/2$ sia G la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel. Si mostri che G può essere scritta come xy^T con x, y vettori di $\mathbb{R}^n$. Si faccia quindi vedere che $G^2 = \beta G$ per un certo β . Utilizzando questa uguaglianza, si determini il numero di iterazioni affinché $\|e^{(k)}\|_\infty / \|e^{(0)}\|_\infty \leq 2^{-53}$.
4. * Si dimostri che il metodo di Jacobi non risulta convergente per $\alpha = 1$.
5. Si scriva una funzione Matlab **function** `y = GS_step(alfa, b, x0)` che preso in ingresso α e un vettore x_0 di partenza e il vettore dei termini noti del sistema $Ax = b$ implementa un passo del metodo di Gauss-Seidel. La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = k^2 x^2 - 1 + 2 \log(kx),$$

dove k è l'ultima cifra del proprio numero di matricola diversa da zero.

1. Si dica quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ dandone una caratterizzazione.
2. Si studi la convergenza (locale, in largo e ordine di convergenza) del metodo delle tangenti alle soluzioni di $f(x) = 0$.
3. Si consideri il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ con

$$g(x) = \frac{1}{k} e^{1-k^2 x^2}.$$

Si dica se l'equazione $x = g(x)$ e $f(x) = 0$ sono equivalenti, ovvero se hanno le stesse soluzioni e si studi la convergenza locale del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$.