Correzione della seconda prova parziale 5/5/2023

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 \\ -\alpha & 2 & & & 2-\alpha \\ & -\alpha & \ddots & & 3-\alpha \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & (n-1)-\alpha \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

a) La matrice non è a pred. diag per righe perché $|1| > |-1|$ è falso

Per la pred. diag per colonne vediamo che condizioni sulle prime $n-1$ colonne sono soddisfatte se $|\alpha| < 1$.

Per l'ultima colonna però non vale la condizione perché

$$1 \not> 1 + |2-\alpha| + |3-\alpha| + \dots + |(n-1)-\alpha|$$

Quindi A non è a pred. diagonale.

(2) GS: $M = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha & n-1 \\ & & & -\alpha \quad 1 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} & 1 \\ & 2-\alpha \\ 0 & 3-\alpha \\ & \vdots \\ & (n-1)-\alpha \\ & 0 \end{bmatrix}$.

$G = M^{-1} N$ $G = \left[\; 0 \; \middle| \; g \right]$ per determinare g

risolvo $Mg = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-\alpha \\ \vdots \\ n-1-\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ ultima colonna di N

$g_1 = 1$

$-\alpha g_1 + 2g_2 = 2-\alpha$ $g_2 = 1$

$-\alpha g_2 + 3g_3 = 3-\alpha$ $g_3 = 1$

$\vdots$

$-\alpha g_{k-1} + k g_k = k - \alpha \Rightarrow g_k = 1$

$-\alpha g_{n-1} + g_n = 0$ $g_n = \alpha g_{n-1}$ $g_n = \alpha$

$G = \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \vdots \\ & 1 \\ & \alpha \end{pmatrix}$

Quindi G.S è convergente se e solo se $|\alpha| < 1$ visto che $\rho(G) = |\alpha|$

3. $\alpha = \frac{1}{2}$ $G = \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \vdots \\ & 1 \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e_n^T$

$G^2 = G \cdot G = x \cdot \underbrace{e_n^T \cdot x}_{} e_n^T = \frac{1}{2} x e_n^T = \frac{1}{2} G$

$\vdots$

$G^k = \frac{1}{2^{k-1}} G$

$$\Rightarrow \quad e^{(k)} = G^k e^{(0)} = \frac{1}{2^{k-1}} G e^{(0)}$$

$$\|e^{(k)}\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \|G\, e_0\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \|x e_n^T e^{(0)}\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{2^{k-1}} \|x e_n^T\|_\infty \cdot \|e^{(0)}\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \|e^{(0)}\|_\infty$$

$$\frac{\|e^k\|_\infty}{\|e^{(0)}\|_\infty} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2^{-53} \qquad 2^{k-1} \geq 2^{53} \quad k-1 \geq 53 \quad \boxed{k \geq 52}$$

4*)

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ \alpha & \ddots & & & 2-\alpha \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & (n-1)-\alpha \\ & & & \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ \frac{\alpha}{2} & \ddots & & & 1-\frac{\alpha}{2} \\ & \frac{\alpha}{3} & \ddots & & 1-\frac{\alpha}{3} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{\alpha}{n-1} & & 1-\frac{\alpha}{n-1} \\ & & & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

per $\alpha = 1$

$$J = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{3} & & & \frac{2}{3} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J \cdot u = u \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si nota che J ha 1 come autovalore relativo a un autovettore tutto costante uguale a 1. Questo è già sufficiente per dimostrare che il metodo non è conv. Si osserva con i cerchi di Gershgorin che gli autovalori sono tutti di modulo ≤ 1. Quindi $\rho(J) = 1$ e il metodo non risulta quindi convergente.

(5) $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right]$$

si nota che $a_{ii} = \begin{cases} i & \text{se } i < n \\ 1 & \text{se } i = n \end{cases}$

$$a_{ij} = \begin{cases} -\alpha & \text{se } j = i-1 \\ \alpha - i & \text{se } j = n,\ i = 2..n-1 \\ -1 & \text{se } i = 1\ j = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i \neq j$$

Quindi

$$x_1^{(k+1)} = b_1 + x_n^{(k)}$$
$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{i}\left[b_i + \alpha x_{i-1}^{(k+1)} - (\alpha - i)\, x_n^{(k)}\right] \quad i = 2, \dots n-1$$
$$x_n^{(k+1)} = 1\left(b_n + \alpha x_{n-1}^{(k+1)}\right)$$

```
function xnew = GS_step(alfa, b, xØ)
  n = lenght(b)
  xnew = zeros(n,1)
  xnew(1) = b(n) + xØ(n);
  For i = 2:n-1
      xnew(i) = (b(i) + alfa * xnew(i-1) - (alfa-i) * xØ(n))/i;
  end
  xnew(n) = b(n) + alfa * xnew(n-1);
end
```

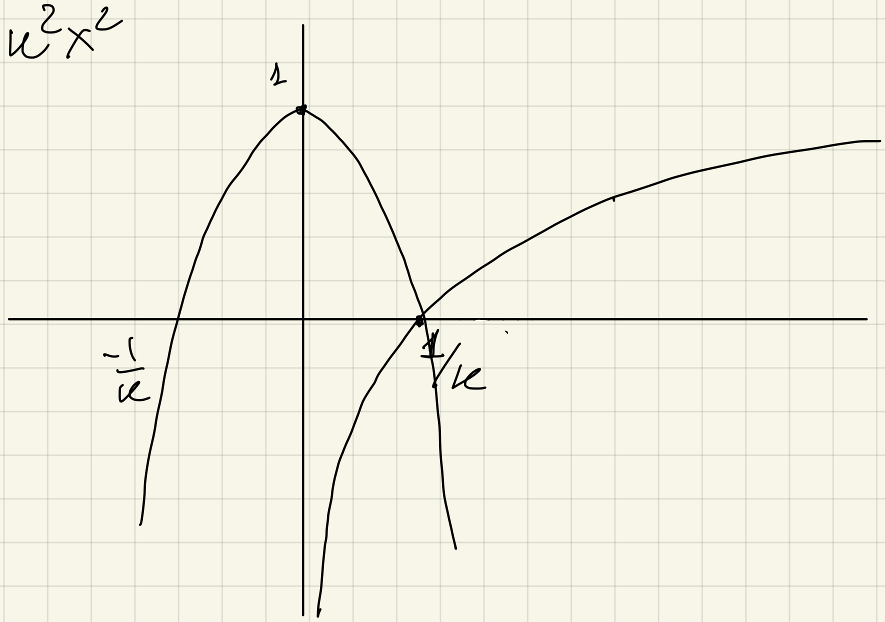
Il costo è dominato dal costo del ciclo for ed è quindi $O(n)$.

Es 2:

a) $f(x) = k^2x^2 - 1 + 2\log(kx)$

Facciamo la separazione grafica:

$2\log kx = 1 - k^2x^2$



Quindi l'equazione $f(x)=0$ ha una sola soluzione $\alpha = \frac{1}{k}$.

b) Studiamo la funzione $f(x)$, sul suo dominio $(0,+\infty)$

$f'(x) = 2k^2x + \frac{2}{\cancel{k}x}\cdot\cancel{k} = 2k^2x + \frac{2}{x} > 0$ poiché $x>0$

$f''(x) = 2k^2 - \frac{2}{x^2} = 0$ $\qquad 2\left(\frac{k^2x^2-1}{x^2}\right) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{k^2}$

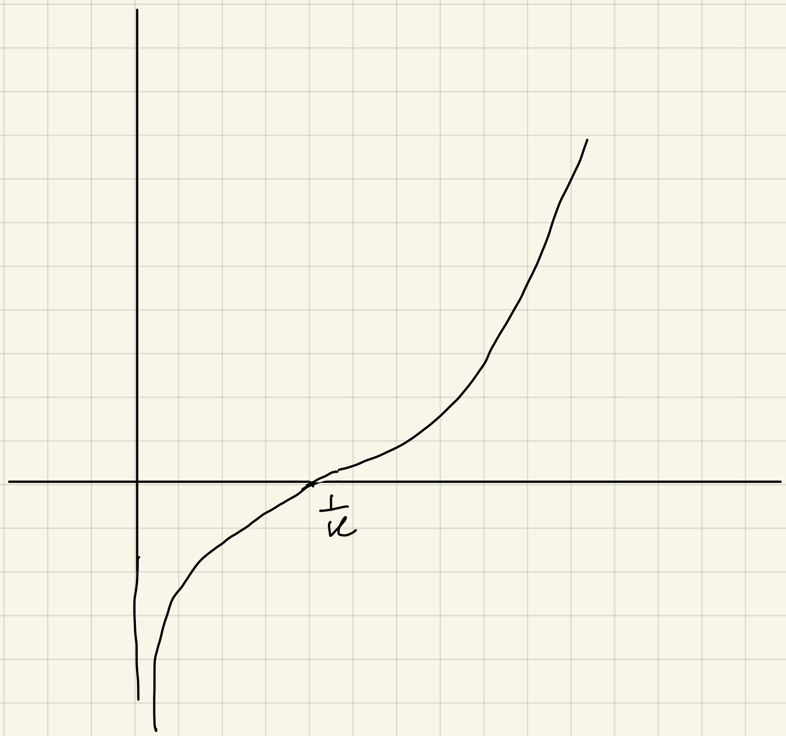
cioè $x = \frac{1}{k}$ poiché sono ammissibili solo i valori $x>0$. $f''(x)>0$ per $x>\frac{1}{k}$ e $f''(x)<0$ per $0<x<\frac{1}{k}$

Quindi f ha un flesso in α.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Il grafico della funzione risulta allora:



- Convergenza locale del Newt.

  $\alpha = \frac{1}{k}$ è radice semplice perché $f'\left(\frac{1}{k}\right) \neq 0$

  $\Rightarrow$ il Newt converge con ordine ≥ 2.

  L'ordine sarà maggiore di 2 perché $f''(\alpha) = 0$.

- Convergenza in largo.

  Si osserva che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

  inoltre le condizioni $f(x) f''(x) > 0$ si verifica

  sia su $S = (0, \alpha)$ che su $R = (\alpha, +\infty)$

  quindi possiamo affermare che avremo convergenza

  per ogni $x_0 \in (0, +\infty)$. Le successioni prodotte sono

  monotone

c) $g(x) = \frac{1}{k} e^{(1 - k^2 x^2)}$

Si nota che $g\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} e^{1 - k^2 \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k} e^0 = \frac{1}{k}$

Per studiare la convergenza locale basta vedere se $|g'(\alpha)| < 1$

$$g'(x) = \frac{1}{k} e^{(1-k^2x^2)} \cdot \left(-2k^2 x\right) = \frac{1}{k} e^{\frac{1-k^2x^2}{2}} \left(-2k^2 x\right)$$

$$g'(\alpha) = \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{g(\alpha)}} \cdot \left(-2k^2\alpha\right) = -k^2\alpha^2 = -2k^2 \cdot \frac{1}{k^2} = -2$$

$g'(\alpha) = -2$ quindi non ho convergenza locale