Correzione prove scritte del 21/5/2025

Es1: $h(x) = (1-x)^3 = (1-x)(1-2x+x^2)$

1. Condizionamento:

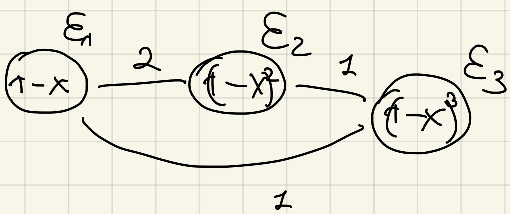
$$\varepsilon_{in} = \frac{x}{h(x)} \cdot h'(x)\,\varepsilon_x = \frac{-x}{(1-x)^3} \cdot 3(1-x)^2\,\varepsilon_x = \frac{-3x}{(1-x)}\,\varepsilon_x$$

$$|\varepsilon_{in}| = \frac{3|x|}{|1-x|}\,|\varepsilon_x|$$

Vediamo che per $x \to 1$ $|\varepsilon_{in}|$ non può essere limitato e quindi il calcolo di $h(x)$ risulta malcondizionato.

Invece per $x \to \infty$ $\varepsilon_{in} \to 3$ e quindi il problema è ben condizionato.

Stabilità: alg 1. $h_1(x) = (1-x)^3$

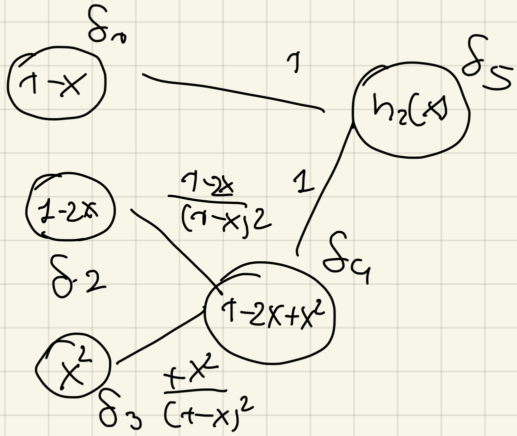


$$\varepsilon_{ALG}^{(1)} = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1$$

$$|\varepsilon_{ALG}^{(1)}| \leq 5u$$

quindi questo algoritmo è sempre stabile

$$h_2(x) = (1-x)(1-2x+x^2)$$



$$\varepsilon_{ALG}^{(2)} = \delta_5 + \delta_2 + \delta_4 + \frac{1-2x}{(1-x)^2}\delta_2 + \frac{x^2}{(1-x)^2}\delta_3$$

$$|\varepsilon_{ALG}^{(2)}| \leq 3u + \frac{|1-2x|}{(1-x)^2}u + \frac{x^2}{(1-x)^2}u =$$

$$= \left(3 + \frac{|1-2x| + x^2}{(1-x)^2}\right)u$$

Questo algoritmo è instabile per $x \to 1$ infatti

$$\lim_{x\to 1} 3 + \frac{|1-2x^{-1}|+x^2}{\underbrace{(1-x)^2}_{\to 0}} = +\infty$$

mentre è stabile per $x \to \pm\infty$.

2. $f(x)=0$ $\quad (1-x)^3 + \frac{1}{2} = 0$ vediamo graficamente

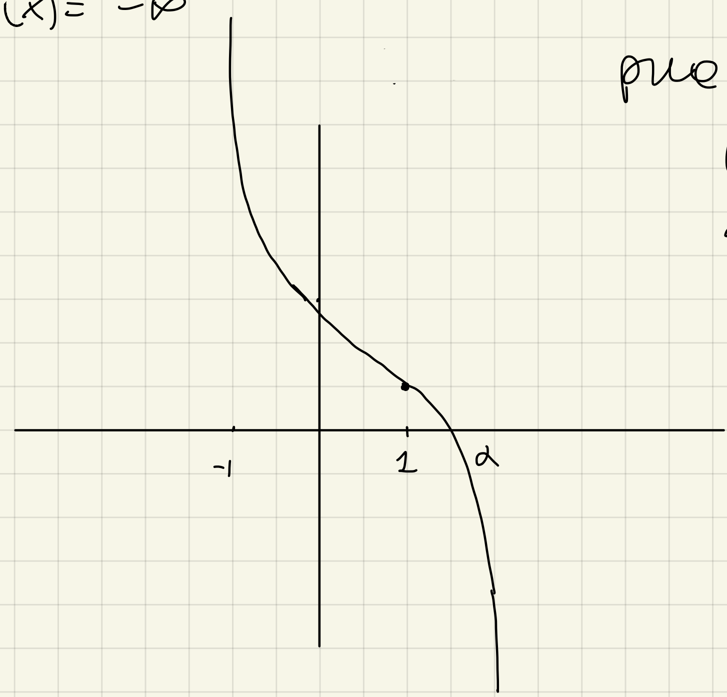
$f'(x) = -3(1-x)^2 = 0 \qquad x = 1 \qquad f'(x) < 0 \quad \forall x$

$f''(x) = +6(1-x) \qquad x = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(x)$ è decrescente e in 1 si annullano derivata prima e seconda



$(1-x)^3 = -\frac{1}{2} \iff$

$1 - x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 1 soluzione

$\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = -\frac{1}{2}$ ok

La funzione $f(x)$ è monotona decrescente e si annulla solo in un punto $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

3. La radice è semplice in quanto $f'(x)$ si annulla solo in 1 e per il resto $f'(x) \neq 0$

Poiché la radice è semplice abbiamo convergenza locale di ordine almeno 2.
Poiché $f''(\alpha) \neq 0$ l'ordine è esattamente 2.

Convergenza in largo:
sia $S = (\alpha, +\infty)$
abbiamo che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$
$$f(x) f''(x) > 0 \ \forall x \in S$$
quindi si ha una convergenza monotona decrescente ad α $\forall x_0 \in S$.

Posso estendere l'intervallo di convergenza. Infatti:
se si sceglie $x_0 \in (1, \alpha) \Rightarrow x_1 \in S$ e poi converge

Es 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha^{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \alpha^2 \\ & & & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & \cdots \ \alpha^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

1. Pred. diagonale per righe:
$$1 > |\alpha|^{n-i} \qquad i = 1 \ldots n-1$$
$$\text{se } |\alpha| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |\alpha|^{n-i} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} \leq \frac{1}{2} < 1$$

per la riga n-esima

$$1 > \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha|^k$$

se $|\alpha| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha|^k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 1$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1 \quad \text{vero.}$$

Quindi per $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ la matrice è a pred. diag. in quanto è a pred. diag per righe.

2. G.S

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \alpha & \alpha^2 & \cdots \ \alpha^{n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & -\alpha^{n-1} \\ & -\alpha^{n-2} \\ 0 & \vdots \\ & -\alpha \\ & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = M^{-1}N \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & g \end{bmatrix}$$

$$M g = \begin{pmatrix} -\alpha^{n-1} \\ -\alpha^{n-2} \\ \vdots \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline a^T & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hline g_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{n-1} \\ \vdots \\ -\alpha \\ \hline 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} -\alpha^{n-1} \\ -\alpha^{n-2} \\ \vdots \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$a^T \cdot \hat{g} + g_n = 0 \Rightarrow \quad g_n = -a^T \hat{g}$$

$$-a^T g = \left(+\alpha \ \alpha^2 \cdots \alpha^{n-1}\right)\begin{pmatrix}\alpha^{n-1}\\ \vdots \\ \alpha\end{pmatrix} = \alpha^n + \alpha^n + \dots + \alpha^n = (n-1)\alpha^n$$

$$\Rightarrow g_n = (n-1)\alpha^n$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -\alpha^{n-1} \\ -\alpha^{n-2} \\ \vdots \\ -\alpha \\ (n-1)\alpha^n \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(G) = |\alpha|^n (n-1) < 1$$

$$|\alpha|^n < \frac{1}{n-1}$$

$$|\alpha| < \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/n}$$

Si nota che vale sempre $\left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/n} > \frac{1}{2}$ che era la condizione di predom. diag per cui GS converge sempre.

3. A può essere fattorizzata LU poiché i suoi minori principali di ordine k con $k = 1, 2 \dots n-1$ sono tutti non singolari.

$$\det A_k = \det I_k = 1 \qquad k = 1 \dots n-1$$

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right]}_{L} \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & y \\ \hline & \beta \end{array}\right] \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-2} \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$x^T \overbrace{U_{n-1}}^{= I_{n-1}} = \left(\alpha \ \alpha^2 \cdots \alpha^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow x^T = \left(\alpha \ \alpha^2 \cdots \alpha^{n-1}\right)$$

$$x^T y + \beta = 1 \qquad \beta = 1 - x^T y$$

$$x^T y = \left(\alpha \ \alpha^2 \cdots \alpha^{n-1}\right)\begin{pmatrix}\alpha^{n-1}\\ \alpha^{n-2} \\ \vdots \\ \alpha\end{pmatrix} = (n-1)\alpha^n$$

$$\Rightarrow \beta = 1 - (n-1)\alpha^n$$

A risulta quindi singolare per $\alpha^n = \frac{1}{n-1}$ cioè per

$\alpha = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/n}$ se n è dispari.

$|\alpha| = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/n}$ se n è pari.

4. Le iterazioni di GS sono descritte nel seguente modo:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

nel nostro caso $a_{ii} = 1$

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha^{n-i} & \text{se } j = n,\ i \neq n \\ 1 & \text{se } i = j \\ \alpha^{j} & \text{se } i = n,\ j \neq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \alpha^{n-i} \, x_n^{(k)} \qquad i = 1 \dots n-1$$

$$x_n^{(k+1)} = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^{j} \cdot x_j^{(k+1)}$$

Il costo risulta lineare in n.

```
function [x, it]=it_GS(b, alpha)
tol = 1.0e-12;
maxit = 100;
err = Inf;
it=0;
xold =b;
while err>tol && it<=maxit
   xnew = do_GS_tep(xold, b, alpha);
   err = norm(xnew-xold, 'inf');
   it= it+1;
   xold= xnew;
end
x=xnew;
end


function xnew = do_GS_tep(xold, b, alpha)
n = length(b);
s= 0;
xnew=xold;
for i=1:n-1
   xnew(i)=b(i)-alpha^(n-i)*xold(n);
   s=s+alpha^i*xnew(i);
end
xnew(n)=b(n)-s;
end
```