
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO - Corso A
19/06/2025

Il punto con l'asterisco è opzionale

Esercizio 1. Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice definita da $a_{ij} = \min\{i, j\}$. Ad esempio per $n = 4$ la matrice risulta

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Applicando il metodo di Gauss ed un ragionamento induttivo, per n generico, si dimostri che la matrice è sempre fattorizzabile LU e si calcolino i fattori triangolari.
2. Si dimostri che A_n è invertibile e si calcoli A_n^{-1} come $U^{-1}L^{-1}$.
3. Utilizzando il punto precedente, si dimostri che gli autovalori di A_n sono tutti reali positivi. Quale è il limite inferiore per gli autovalori di A_n ?
4. Per $n = 3$ e $n = 4$ si determini la matrice di iterazione di Gauss-Seidel e da questo si cerchi di inferire la struttura della matrice di Gauss-Seidel nel caso n generico. Il metodo di Gauss-Seidel è convergente?
5. Si scriva un programma Matlab che dato in input il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, calcola il prodotto $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Il programma non deve richiedere la memorizzazione di A . Si determini la complessità computazionale della funzione scritta.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \log(-x)$.

1. Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$, e se ne diano gli intervalli di separazione.
2. Si studi il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$ e la stabilità dell'algoritmo supponendo che esista una funzione di libreria che implementa il logaritmo con un errore limitato dalla precisione di macchina.
3. Si studi la convergenza (locale, in largo e ordine di convergenza) del metodo delle tangenti alle soluzioni di $f(x) = 0$.
4. * Si dica se l'equazione $x = g(x)$ con $g(x) = -\exp(1 - x^2/2)$ risulta equivalente a $f(x) = 0$ e si studi la convergenza locale del metodo di punto fisso $x_{i+1} = g(x_i)$.