

Convezione compito del 19/6/2025

Es 1

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & - & - & 1 \\ & 2 & 2 & - & - & 2 \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & & & \\ & & & & & n \end{bmatrix}$$

applico un passo di Gauss

$$E_1 A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & - & - & 1 \\ 0 & 1 & - & - & 1 \\ & 1 & 2 & - & - & 2 \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 1 & - & - & 1 \\ 0 & 1 & - & - & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ A_{n-1} \end{matrix} \end{array} \right] E_1 = I - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e_1^+ =$$

Così come è stato possibile applicare il primo passo per indurre al passo k-esimo abbiamo:

$$E_k E_{k-1} \dots E_1 A_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{A_{n-k}} & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Al passo $n-2$ abbiamo

$$E_{n-2} E_{n-3} \dots E_1 A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & - & - & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui

$$\underbrace{E_{n-1} E_{n-2} \dots E_1}_{L^{-1}} A_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

2) A_n è invertibile in quanto $\det A_n = \det L \det U = 1$

$$A_n^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

si nota che $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}$ come ottenuto a lezione

$$\Rightarrow A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

L'inversa di A_n è una matrice triangolare.

3) Gli autovalori di A_n sono tutti reali positivi infatti sono reali poiché A_n è simmetrica.

Il segno degli autovalori si può infine trovare dal segno degli autovalori di A_n^{-1} .

Applicando il teorema di Gershgorin ad A_n^{-1} infatti si vede che $0 \leq \lambda_{A_n^{-1}} \leq 4$ ma sappiamo che A_n è invertibile quindi $0 < \lambda_{A_n^{-1}} \leq 4$ poiché

$$\lambda_{A_n} = \frac{1}{\lambda_{A_n^{-1}}} \Rightarrow \lambda_{A_n} \geq \frac{1}{4}$$

4) $n=3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = M^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

quindi nel caso $n=3$ il metodo è convergente

perché $\rho(G_3) = \frac{2}{3} < 1$. $G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$

Nel caso generale.

$$G_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 2 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ & -2 & \dots & -2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \dots & -\frac{1}{3} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di G_n sono $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{k}{k+1}, \dots, \frac{n-1}{n}$

quindi $\rho(G_n) = \frac{n-1}{n} < 1$ ed il metodo risulta convergente.

5) $y = Ax$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ x_{n+2} \cdot \sum_{i=2}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n i x_i \end{bmatrix} \rightarrow y_k = \sum_{i=1}^{k-1} x_i + k \sum_{i=k}^n x_i$$

si nota che possiamo avere una funzione di costo lineare onde sfruttare il fatto che $A=LU$

$$LUx = Lz =$$

$$z = Ux = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = Lz = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 1 & - & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 + z_2 \\ \vdots \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n \end{bmatrix}$$

Function $y = \text{mat-prod}(x)$

$n = \text{length}(x);$

$z = \text{zeros}(n, 1)$

$z(n) = x(n)$

for $i = n-1:-1:1$

$z(i) = z(i+1) + x(i);$

end

$y = \text{zeros}(n, 1);$

$y(1) = z(1)$

for $i = 2:n$

$y(i) = y(i-1) + z(i);$

end

la funzione ha costo lineare in n .

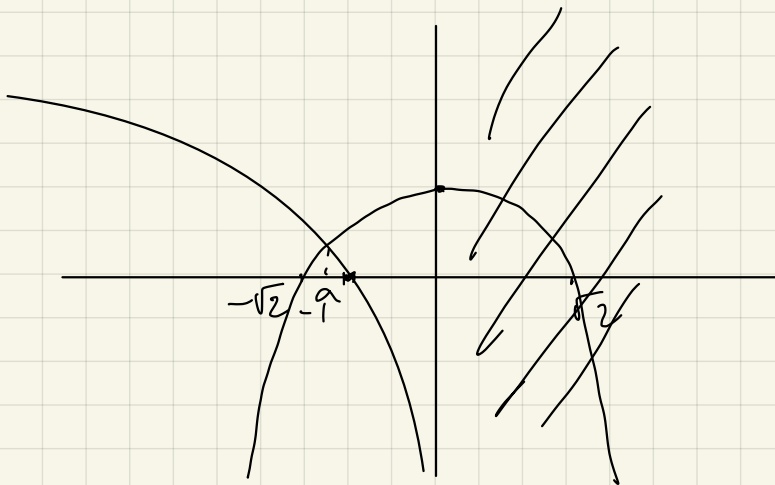
Esercizio 2.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \log(-x)$$

Il dominio della funzione è $x < 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{2} = \log(-x)$$

Facciamo la separazione grafica:



$f(x) = 0$ ha
una sola soluzione
reale e
 $-\sqrt{2} < x < -1$

2. Condizionamenti:

$$C_x = \frac{x}{f(x)} f'(x) \varepsilon_x$$

$$f'(x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x < 0$$

la $f(x)$ risulta quindi crescente.

$$C_x = \frac{\cancel{x}}{f(x)} \cdot \frac{-x^2 - 1}{\cancel{x}} \varepsilon_x$$

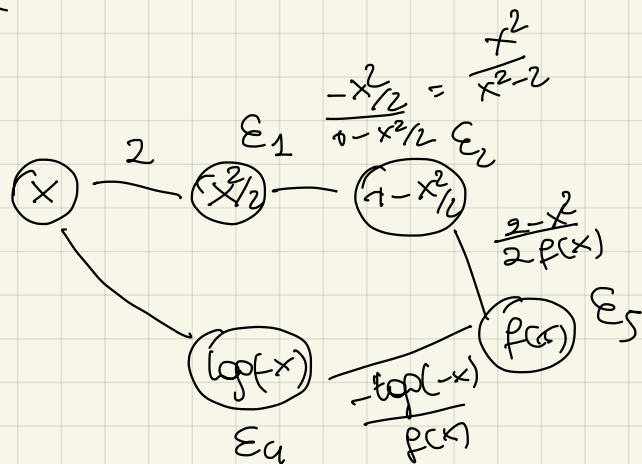
$$C_x = \frac{-x^2 - 1}{1 - \frac{x^2}{2} - \log(-x)} \varepsilon_x$$

Si nota che per $x \rightarrow \alpha$ $|C_x| \rightarrow \infty$ quindi le

problema è mal condizionato per $x \rightarrow 0$

per $x \rightarrow \infty$ invece ho $C_{x \rightarrow \infty} = 2$ e quindi il problema è ben condizionato per $x \rightarrow \infty$.

Stabilità:



$$E_{Acc} = E_5 - \frac{\log(-x)}{f(x)} E_4 + \frac{2-x^2}{2f(x)} \left(E_2 + \frac{x^2}{x^2-2} E_1 \right)$$

$$|E_{Acc}| \leq |E_5| + \frac{|\log(-x)|}{|f(x)|} |E_4| + \frac{|2-x^2|}{2|f(x)|} |E_2| + \frac{x^2}{2|f(x)|} |E_1|$$

$$\leq 4 \left(1 + \frac{|\log(-x)|}{|f(x)|} + \frac{|2-x^2|}{2|f(x)|} + \frac{x^2}{2|f(x)|} \right)$$

L'algoritmo è instabile per $x \rightarrow 0$. Per $x \rightarrow \infty$ invece tutti i termini hanno limite finito.

3) Disegnare il grafico di $f(x)$

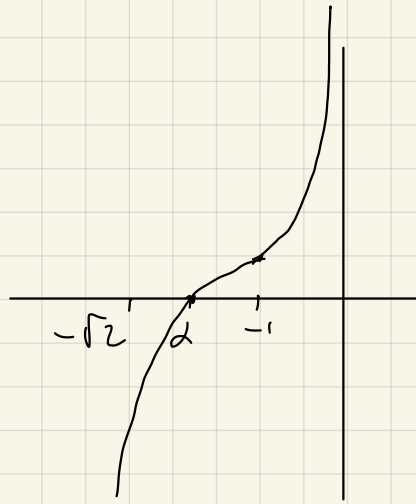
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -x - \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x < 0$$

$$f''(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+1}{x^2} > 0 \quad -1 < x < 1$$

Poiché f è definito per $x < 0$ abbiamo un punto di flesso in $x = -1$. La concavità della funzione è rivolta verso l'alto per $x > -1$ e verso il basso per $x < -1$.



$$f(-1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Poiché $f'(x) \neq 0$ ($f'(x) > 0 \forall x < 0$) abbiamo che la radice è semplice e abbiamo convergenza locale di ordine 2. Infatti $f''(x) \neq 0$.

Studiamo la convergenza in largo.

Si nota che $f'(x) \neq 0 \forall x$. Inoltre $f(x) f''(x) > 0 \quad x < -1$ quindi per $x_0 \in (-\infty, -1)$ abbiamo che sono verificate le ipotesi del teorema e quindi il nostro risultato produce successioni monotone crescente convergenti ad -1 .

Si nota che se $x_0 \in (-1, 0) \Rightarrow x_1 \in (-\infty, -1)$ e quindi, abbiamo convergenza per ogni $x_0 < 0$.

Anche scegliendo $x_0 \in (-1, 0) \Rightarrow x_1 < -1$ e quindi convergo per ogni scelta di x_0 nel dominio della funzione.

$$4*) \quad x = -e^{(1-x^2/2)} \iff e^{(1-x^2/2)} = -x$$

per $x < 0$ possiamo applicare la funzione logaritmo:

$$\log(-x) = (1 - x^2/2) \iff 1 - \frac{x^2}{2} - \log(-x) = 0$$

per $x > 0$ non ci sono punti fissi: $f(x) = 0$ è equivalente a $x = g(x)$.

Per studiare la convergenza locale occorre vedere se $|g'(x)| < 1$

$$g'(x) = -e^{(1-x^2/2)} \left(-\frac{2x}{2} \right) = x e^{(1-x^2/2)}$$

$$g'(x) = \underbrace{d e^{1-d^2/2}}_{-1} = -d^2$$

$$|g'(x)| = |d^2| < 1 \quad \text{No perché} \quad -\sqrt{2} < d < 1$$

$$\Rightarrow |d^2| > 1$$

Il metodo di punto fisso non è quindi localmente convergente.