4° Compitino di MDAL

26 maggio 2016

Cognome e nome: ....CORREZIONE........................

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

(Aggiunto al testo: $\vec{v} \neq \vec{0}$)

Esercizio 1. Siano dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Trovare una base ortogonale $(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ di $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
(b) Trovare un vettore $\vec{v}$ ortogonale a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

(a): Applichiamo Gram-Schmidt: $\vec{q}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{t} = \vec{v}_2 - \left(\vec{q}_1^T \vec{v}_2\right)\vec{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} . \qquad \vec{q}_2 = \frac{\vec{t}}{\|\vec{t}\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Visto che è richiesto solo una base ortogonale, si può saltare l'ultimo passaggio e usare $\vec{q}_2 = \vec{t}$, oppure evitare anche la prima normalizzazione e usare la formula

$$\vec{q}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\left(\vec{v}_2^T \vec{v}_1\right)}{\left(\vec{v}_1^T \vec{v}_1\right)} \vec{v}_1 .$$

(b) Il vettore che cerchiamo sta in

$$\operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

$\vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ per esempio va bene, come è facile verificare:

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix} = 0.$$

Oppure: scegliere un vettore $\vec{v}_3$ qualunque che non appartenga a $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, e proseguire con Gram-Schmidt:

$$\vec{v} = \vec{v}_3 - (\vec{q}_1^T \vec{v}_3)\,\vec{q}_1 - (\vec{q}_2^T \vec{v}_3)\,\vec{q}_2.$$

Esercizio 2. Calcolare autovalori e autovettori di

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice è diagonalizzabile?

(c)

$$\det(M-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda^3$$ (calcolabile in diversi modi)

Tre radici coincidenti:

λ_i	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
0	3	?

Calcoliamo $m_g(0)$ e gli autovettori associati:

$$\ker\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

1 pivot, quindi $m_g(0) = \dim \ker M = 2$.

La matrice non è diagonalizzabile perché $m_g(0) \neq m_a(0)$.

I suoi autovalori sono tutti gli elementi di $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ tranne $\vec{0}$. (Occhio: non sono solo i multipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e quelli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ma tutte le loro comb. lineari)

→

In alternativa: è facile vedere che la matrice viene ridotta a $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ da un passo di eliminazione di Gauss. Quindi $m_g(0) = 2$, e $m_a(0) \geq 2$. Il polinomio caratteristico dev'essere della forma $-\lambda^2(\lambda - a)$ per un qualche reale a, e il test della traccia fornisce $a = 0$.

Da qui si continua come prima.

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z+y \\ y+x \\ 2x \end{bmatrix}.$$

(a) calcolare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (in partenza e in arrivo).
(b) calcolare la matrice M associata a f rispetto alla base

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Trovare *un* autovalore di f.

(a)

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) $f(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$

$f(\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ (risolvendo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$f(\vec{v}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ (analogamente)

Quindi $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Oppure</u>: Calcoliamo l'inverse di $V = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$ –

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}}_{V^{-1}}\right]$$

e usiamo la formula $M = V^{-1}AV$.

(c) Al passo precedente abbiamo calcolato $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, quindi $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore di f di autovalore 2.

Oppure: possiamo calcolare gli autovalori di f come gli autovalori di qualunque matrice associata a f tramite la stessa base in partenza e in arrivo.

Per esempio, di A o di M

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

usando Laplace sulla prima colonna, quindi $\lambda_1 = 2$ è un autovalore.

(Gli altri sono $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$)