
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO - Corso A
08/07/2025

Il punto con l'asterisco è opzionale

Esercizio 1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j, i = 1, \dots, n \\ \alpha & \text{se } i = n, j = 1 \\ 1 + \alpha & \text{se } i = n, j = 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{se } j = i+1, i = 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio per $n = 4$ la matrice risulta

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 + \alpha & 1 + \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

1. Si dica se esistono valori del parametro α per cui la matrice è a predominanza diagonale.
2. Si studi al variare del parametro α se la matrice è fattorizzabile LU, individuando i due fattori triangolari. Per quali valori di α la matrice è invertibile?
3. Si consideri la decomposizione additiva $A = M - N$ con M uguale alla parte triangolare superiore di A e quindi con $N = M - A = e_n y^T$, dove $e_n = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ e $y = -[\alpha, 1 + \alpha, \dots, 1 + \alpha, 0]^T$. Si dimostri che la matrice di iterazione $P = M^{-1}N = xy^T$ dove x è tale che $Mx = e_n$. (*) Per quali valori di α il metodo è convergente?
4. Si scriva un programma Matlab che dato in input il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, calcola il prodotto $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Il programma non deve richiedere la memorizzazione di A . Si determini la complessità computazionale della funzione scritta.

Esercizio 2. È data la funzione

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali $\alpha < \beta < \gamma$?
2. Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$ e la stabilità dell'algoritmo,
3. Si studi la convergenza del metodo delle tangenti (locale, in largo e ordine di convergenza) a ciascuna delle tre soluzioni.
4. Si studi la convergenza alle tre soluzioni del metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{x^2}.$$