Correzione della prova dell' 8/7/2025

Es 1.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ \alpha & \alpha+1 & \dots & \alpha+1 & \alpha \end{bmatrix}$$

1. La matrice non è mai a predominanza diagonale.

Infatti per la predominanza diagonale per colonna non è già verificata la condizione sulla prima colonna.

$$|\alpha| > |\alpha| \quad \text{MAI}$$

Per la predominanza diagonale per riga, la condizione non può essere mai soddisfatta sull'ultima colonna:

$$|\alpha| > |\alpha| + |\alpha+1| + \dots + |\alpha+1| \iff (n-2)\,|\alpha+1| < 0 \quad \underline{\text{MAI}}$$

2. Se $\alpha \neq 0$ la matrice è fattorizzabile LU infatti in tal caso i minori principali

$$A_k = A(1:k, 1:k) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \qquad k = 1, \dots n-1$$

sono tali che $\det A_k = \alpha^k \neq 0$ per $\alpha \neq 0$

quindi sono soddisfatte le condizioni sufficienti.

$$A = LU = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & y \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \alpha & \\ \hline & & 0 & & \beta \end{array}\right]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x^T U_{n-1} = [\alpha, \alpha+1 \dots \alpha+1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha+1 \\ \vdots \\ \alpha+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha x_1 = \alpha \qquad x_1 = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + \alpha x_2 = \alpha + 1 \Rightarrow & x_2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ & x_k = 1 \\ x_k + \alpha x_{k+1} = \alpha + 1 \Rightarrow & x_{k+1} = 1 \\ \vdots & \\ x_{n-2} + \alpha x_n = \alpha + 1 \Rightarrow & x_{n-1} = 1 \end{array}\right\} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T y + \beta = \alpha \Rightarrow \beta = \alpha - x^T y = \alpha - 1$$

Da cui abbiamo che se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$$A = LU \quad \text{con} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \alpha & 1 \\ & & & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$ la matrice è comunque fatt. LU infatti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Per $\alpha \neq 0 \Rightarrow \det A = \det U = \alpha^{n-1}(\alpha - 1) \neq 0$

Per $\alpha = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq 1 \end{matrix}}$$

3. $A = M - N$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \alpha \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ -\alpha & -(1+\alpha) & \cdots & -(1+\alpha) & 0 \end{bmatrix} = e_n y^T$$

con $y = [-\alpha, -(1+\alpha), \dots -(1+\alpha), 0]^T$

$P = M^{-1}N = \underbrace{M^{-1} e_n}_{= x} y^T = x y^T$ cioè P è una matrice di rango 1 con x tale che $M^{-1}e_n = x \Rightarrow$

$$Mx = e_n$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \alpha x_n = 1 \quad x_n = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha x_{n-1} + x_n = 0$$

$$\Rightarrow x_{n-1} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\vdots$$

$$\alpha x_{n-i} + x_{n-i+1} = 0$$

$$\Rightarrow x_{n-i} = -\frac{x_{n-i+1}}{\alpha}$$

$$= (-1)^i \frac{1}{\alpha^{i+1}}$$

$$x = \begin{bmatrix} (-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha^n} \\ (-1)^{n-2}\frac{1}{\alpha^{n-1}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$P = xy^T = \begin{bmatrix} (-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha^n} \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \left[-\alpha, -(1+\alpha), \dots, -(1+\alpha), 0\right]$$

La matrice di iterazione è piena, ma sappiamo che le matrici di rango 1 hanno $n-1$ autovalori uguali a zero, mentre

L'autovalore mancante è uguale a $y^T x$

quindi $\rho(P) = |y^T x| = |(-\alpha, -(1+\alpha), \dots -(1+\alpha)\ 0)\ x| =$

$$= \left| \frac{\alpha}{\alpha^n} - \frac{(\alpha+1)}{\alpha^{n-1}} + \frac{(\alpha+1)}{\alpha^{n-2}} - \frac{(\alpha+1)}{\alpha^{n-3}} \dots + \frac{(1+\alpha)}{\alpha^2} + 0 \right|$$

$$\left| \cancel{\frac{1}{\alpha^{n-1}}} - \cancel{\frac{1}{\alpha^{n-1}}} - \cancel{\frac{1}{\alpha^{n-2}}} + \cancel{\frac{1}{\alpha^{n-2}}} + \frac{1}{\alpha^{n-3}} \dots + \frac{1}{\alpha} \right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$$

$|\alpha| > 1$.

4) $Ax = y$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \alpha & \alpha+1 \dots & \alpha+1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha x_2 + x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_{n-1} + x_n \\ \alpha x_1 + (\alpha+1) x_2 + \dots + (\alpha+1) x_{n-1} + \alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

```
Function    y = mat_prod (x, alfa)
n = lenght(x);
s = alfa * x(1)
for i = 1:n-2
        y(i) = alfa * x(i) + x(i+1);
        s = s + (α+1) * x(i+1);
end
        y(n-1) = alfa * x(n-1) + x(n);
        s = s + α * x(n);
```

Es 2:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

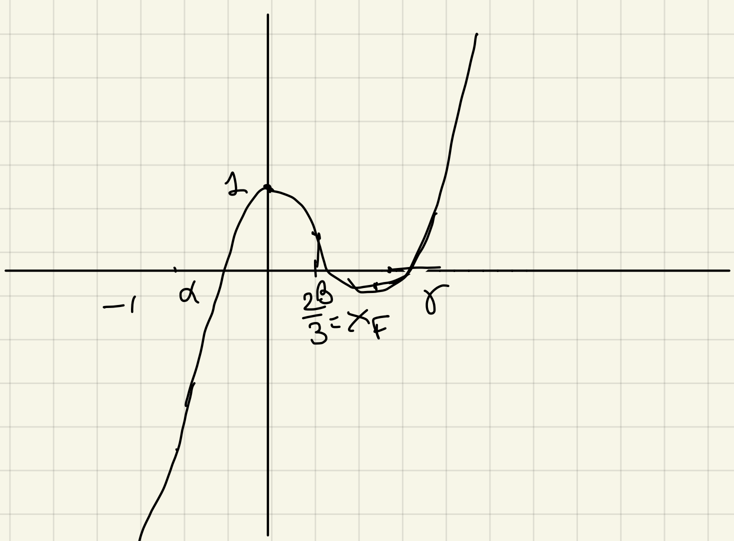
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \qquad x(3x-4) = 0$ $\quad x = 0$, $\quad x = \frac{4}{3}$

$f'(x) > 0 \qquad x < 0$, $\quad x > \frac{4}{3}$

$f(0) = 1 \qquad f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4^3}{3^3} - 2 \cdot \frac{16}{9} + 1 = \frac{4^3 - 6 \cdot 16 + 27}{3^3} = -\frac{5}{27} < 0$



quindi ci sono 3 soluzioni reali

$\alpha < 0$

$0 < \beta < \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} < \gamma$

Possiamo dare limitazioni più precise:

$f(-1) = -2 < 0 \Rightarrow \qquad -1 < \alpha < 0 \qquad 0 < \beta < \frac{4}{3}$

$f(2) = 1 \qquad \frac{4}{3} < \gamma < 2$

$f''(x) = 6x - 4 = 0 \qquad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

In realtà le soluzioni possono essere calcolate analiticamente. Infatti $f(1) = 1-2+1=0 \Rightarrow$

$f(x) = (x-1)(x^2-x-1)$ e poi posso calcolare le radici di

$x^2-x-1=0 \qquad \Delta = 1+4=5 \qquad x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \Big(x - \underbrace{\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)}_{=\alpha}\Big)\Big(x-\underbrace{1}_{=\beta}\Big)\Big(x-\underbrace{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)}_{=\gamma}\Big)$$

2) Condizionamento

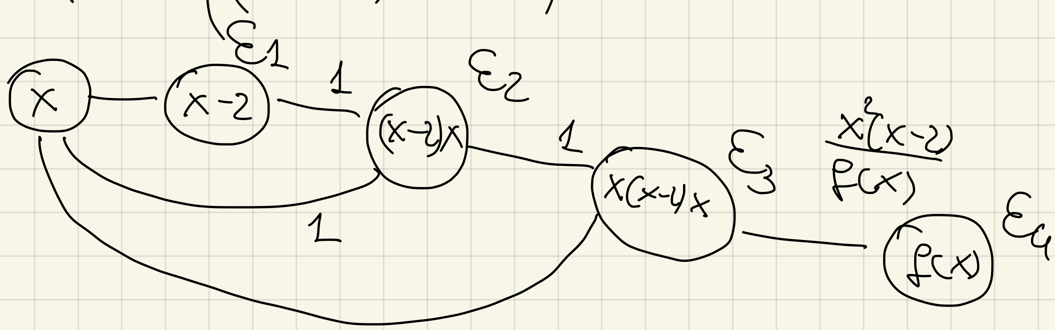
$$\varepsilon_{IN} = \frac{x}{f(x)} f'(x)\,\varepsilon_x = \frac{x}{x^3-2x^2+1}(3x^2-4x)\,\varepsilon_x$$

si nota che il problema è malcondizionato per x: $f(x)=0$ quindi per $x\to\alpha$, $x\to\beta$, $x\to\gamma$

per $x\to 0$ invece il problema è ben condizionato

<u>Stabilità</u>: possiamo calcolare $f(x)$ con l'algoritmo di Ruffini-Horner.

$$f(x) = ((x-2)x+0)x+1$$



$$\varepsilon_{ALG} = \varepsilon_4 + \frac{x^2(x-2)}{f(x)}\left(\varepsilon_3+\varepsilon_2+\varepsilon_1\right)$$

$$|\varepsilon_{ALG}| \le \left(3\,\frac{|x^2(x-2)|}{|f(x)|}+1\right)u$$

L'algoritmo è quindi instabile vicino alle soluzioni α, β, γ. E' invece stabile per $x \to \pm\infty$

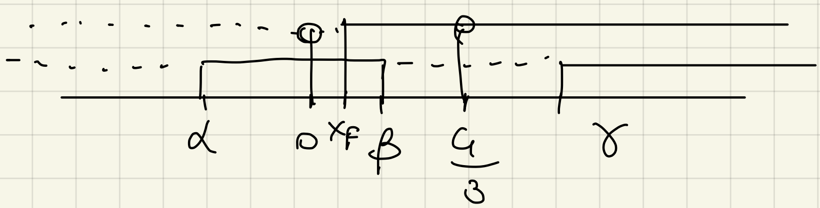
3. Le radici sono semplici, quindi sono soddisfatte le condizioni per la convergenza locale con ordine 2 perché $f''(x) \neq 0$ in α, β, γ.

Per la convergenza in largo vediamo che

$f(x) > 0 \qquad \alpha < x < \beta \,, \quad x > \gamma$

$f''(x) > 0 \qquad x > x_F$

$f(x) \neq 0$ per $x \neq 0, \; x \neq \frac{4}{3}$



Quindi abbiamo

$S = (-\infty, \alpha) \Rightarrow \forall\, x_0 \in S \quad x_k \in S$ e $x_k \to \alpha$

$R = (x_F, \beta) \Rightarrow \forall\, x_0 \in R \quad x_k \in R$ e $x_k \to \beta$

$T = (\gamma, +\infty) \Rightarrow \forall\, x_0 \in T \quad x_k \in T$ e $x_k \to \gamma$

Tali intervalli possono essere estesi. In particolare

se $x_0 > \frac{4}{3} \Rightarrow x_k \to \gamma$

e $x_0 < 0 \Rightarrow x_k \to \alpha$

Invece la convergenza a β è più complessa.

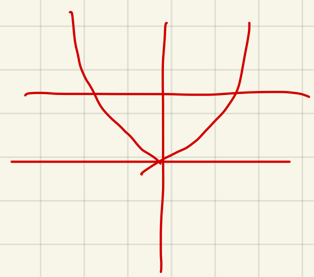
Infatti se $x_0 \in (\beta, \frac{4}{3}) \Rightarrow x_1 < \beta$, ma occorre essere sicuri che $x_1 > x_F$ altrimenti la divenuce della successione si complica

4) $g(x) = x - \frac{f(x)}{x^2} = x - \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} =$

$g(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

Possiamo applicare il teorema del punto fisso

$x = g(x) \iff \frac{f(x)}{x^2} = 0 \iff f(x) = 0$



$g'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$|g'(x)| < 1 \iff |x^3| > 2$ $\quad x > \sqrt[3]{2} \approx 1,25$

$x < -\sqrt[3]{2}$

poiché $-1 < \alpha < 0$ non ho convergenza ad α

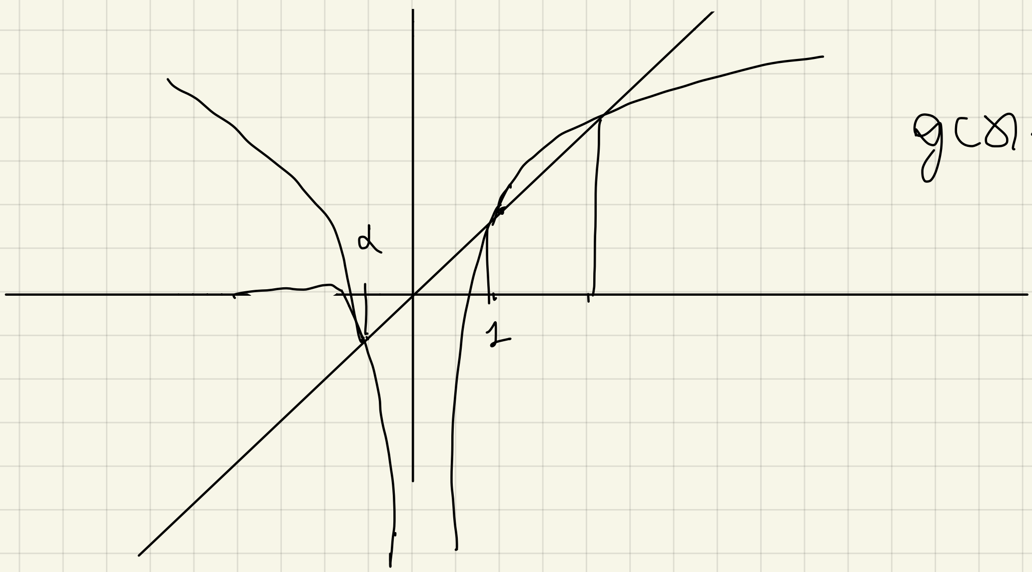
$\gamma > 2 \Rightarrow |g'(\gamma)| < 1$ quindi ho convergenza locale a γ

Le limitazioni trovate su β non permettono di arrivare alla conclusione infatti:

$0 < \beta < \frac{4}{3}$ poiché $f(1) = 0$

$\Rightarrow$ $\beta = 1$ e quindi

$g'(1) = -2$ quindi non ho convergenza a β.



$g(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

Si nota che per $x_0 > \beta$ ho convergenza a γ.

Poiché α, β, γ sono note possiamo studiare la convergenza locale semplicemente calcolando $g'(\alpha)$, $g'(\beta)$, $g'(\gamma)$.