5° Esame di MDAL
1 luglio 2016

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. a) Trovare tutti gli interi x che soddisfano la congruenza:

$$693x \equiv 945 \quad (147)$$

b) Trovare tutti gli interi y che soddisfano la congruenza:

$$693y^2 \equiv 945 \quad (147)$$

c) Trovare tutti gli interi z che soddisfano la congruenza:

$$693z^3 \equiv 945 \quad (147)$$

a) Cominciamo a fare alcune semplificazioni

$693x \equiv 945 \ (147) \iff 231x \equiv 315 \ (49)$

$\iff 33x \equiv 45 \ (7) \iff 5x \equiv 3 \ (7)$

Ora, moltiplicando l'eq per 3 (posso farlo perchè $(3,7)=1$) si ha

$$15x \equiv 9 \ (7)$$
$$x \equiv 2 \ (7)$$

b) Dal punto (a) abbiamo $693y^2 \equiv 945 \ (147)$
$\iff y^2 \equiv 2 \ (7)$ Per sostituzione verifico che le uniche soluzioni son

$y \equiv 3 \ (7)$ e $y \equiv -3 \ (7)$

c) L'eq assegnata è equivalente a

$$z^3 \equiv 2 \quad (7)$$

Procedo per sostituzione e vedo che se $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (

$\Rightarrow z^3 \equiv \pm 1 \quad (7)$ ~~$\forall z \equiv 1$~~ e $0^3 \equiv 0 \ (7)$

Ne segue che la congruenza non ha soluzioni modulo 7

Esercizio 2. Fattorizzare il polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{Z}_{19}[x]$.

Osservo che $f(1)=0$ quindi $x-1 \mid f(x)$

Calcolo $f(x) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$

Analizzo il polinomio x^2+x+1

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$ x^2+x+1 è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ e quindi anche in $\mathbb{Q}[x]$.

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$ in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$

~~ev~~ (i fattori scritti sono irriducibili)

In $\mathbb{C}[x]$ dal Teorema fond dell'algebra so che i fattori irriducibili hanno tutti grado 1. Calcolo le radici di x^2+x+1

$\Delta = -3$ $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2\left(x + \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathbb{Z}_{19}[x]$: Sicuramente $f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$

Si tratta di vedere se x^2+x+1 è irriducibile o equivalentemente se $\Delta = -3$ è un quadrato in $\mathbb{Z}_{19}$. Poiché $-3 \equiv 16 \equiv 4^2$ (19) $\Delta \equiv 4^2$ (1

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Le radici son

$$x_1 = \frac{-1-4}{2} = -5 \cdot 2^{-1} \equiv -5 \cdot 10 \equiv 7 \quad (1$$

$$x_2 = \frac{-1+4}{2} = 3 \cdot 2^{-1} \equiv 30 \equiv 11 \quad (19)$$

$$f(x) = (\cancel{x-1})^2 (x-7)(x-11)$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \\ x+ay \end{bmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro fissato.
(i) Trovare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
(ii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione f è iniettiva?
(iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione f è suriettiva?

(i) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{bmatrix}$ quindi $M = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ è la matrice associata

(ii) f è iniettiva se $f(\vec{v}) \neq f(\vec{w})$ per ogni $\vec{v} \neq \vec{w}$, cioè, se $f(\vec{v}-\vec{w}) \neq \vec{0}$ per ogni $\vec{v}-\vec{w} \neq \vec{0}$, ovvero, se $f(\vec{x}) = \vec{0}$ ha solo la soluzione $\vec{x} = \vec{0}$. Per vedere quante soluzioni ha il sistema usiamo eliminazione di Gauss su M:

$$M \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & a-2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ II-2I \\ 3-I \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema $M\vec{x} = \vec{0}$ ha solo la soluzione 0 quando $a \neq 2$, e infinite soluzioni quando $a = 2$. Quindi la risposta è

$\boxed{f \text{ è iniettiva per ogni } a \neq 2}$

(iii) Si noti che $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}\right)$,

quindi $\dim \mathrm{Im}\, f \leq 2$, e non può mai essere

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$. Cioè, $\boxed{f \text{ non è mai suriettiva}}$.

In alternativa (ii) e (iii) si possono fare utilizzando i criteri visti a lezione che legano iniettività/suriettività alla presenza di pivot su ogni colonna/riga.

Esercizio 4. (i) Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sul campo $\mathbb{R}$. La matrice è diagonalizzabile?
(ii) Trovare autovalori e autovettori di A sul campo $\mathbb{C}$. La matrice è diagonalizzabile?
(iii) Si esibisca una matrice $V \in \mathbb{C}^{3\times3}$ tale che $V^{-1}AV$ è diagonale.

(i) $\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2+1\right].$

$\boxed{\lambda_1=1}$ è una soluzione; non ce ne sono altre in $\mathbb{R}$ perché $(2-\lambda)^2+1 > 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Autovettori associati a $\lambda_1=1$:

$\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \boxed{\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}.$

λ	$m_a(\lambda)$	$m_g(\lambda)$
1	1	1

La matrice A $\boxed{\text{non è diagonalizzabile}}$ sul campo $\mathbb{R}$ perché la somma delle molteplicità algebriche non fa 3.

(ii) In aggiunta a $\lambda_1=1$, con gli stessi autovettori, sul campo $\mathbb{C}$ abbiamo due soluzioni di $(2-\lambda)^2+1=0$, vale a dire $(2-\lambda)^2 = -1 \iff 2-\lambda = \pm i \iff$

$\lambda_2 = 2+i$
$\lambda_3 = 2-i$

Autovettori relativi a $2+i$:

$$\operatorname{Ker}(A-(2+i)I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix} \overset{II + i\cdot I}{=} \boxed{\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$$

$\left(\text{che è uguale a } \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)$

Autovett. relativi a $2-i$:

$$\operatorname{Ker}(A-(2-i)I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1+i \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+i \end{bmatrix} \overset{II - i\cdot 1}{=} \boxed{\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$$

$\left(\text{o anche } \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)$

λ_i	m_a	m_g
1	1	1
$2+i$	1	1
$2-i$	1	1

la matrice $\boxed{\text{è diagonalizzabile}}$

(iii) Basta prendere la matrice V che ha tre autovettori lin. indipendenti come colonne, cioè

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Difatti sappiamo che $A = VDV^{-1}$, cioè $V^{-1}AV = D$,

con $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$.