

5° Esame di MDAL

1 luglio 2016

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. a) Trovare tutti gli interi x che soddisfano la congruenza:

$$693x \equiv 945 \pmod{147}$$

b) Trovare tutti gli interi y che soddisfano la congruenza:

$$693y^2 \equiv 945 \pmod{147}$$

c) Trovare tutti gli interi z che soddisfano la congruenza:

$$693z^3 \equiv 945 \pmod{147}$$

Esercizio 2. Fattorizzare il polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{Z}_{19}[x]$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \\ x + ay \end{bmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro fissato.

- (i) Trovare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .
- (ii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione f è iniettiva?
- (iii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione f è suriettiva?

Esercizio 4. (i) Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sul campo \mathbb{R} . La matrice è diagonalizzabile?

(ii) Trovare autovalori e autovettori di A sul campo \mathbb{C} . La matrice è diagonalizzabile?

(iii) Si esibisca una matrice $V \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tale che $V^{-1}AV$ è diagonale.