Esame di MDAL
1 settembre 2016

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 44x \equiv 16 \pmod{200} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{35}. \end{cases}$$

1ª equazione $44x \equiv 16 \ (200) \iff 11x \equiv 4 \ (50)$

$\begin{cases} 11x \equiv 4 \ (25) \\ x \equiv 0 \ (2) \end{cases}$ ← moltiplico per 2 $(2, 25) = 1$

$\begin{cases} -3x \equiv 8 \ (25) \\ x \equiv 0 \ (2) \end{cases}$ moltiplico per 8 $(8, 25) = 1$

$\begin{cases} x \equiv 64 \ (25) \\ x \equiv 0 \ (2) \end{cases}$ ...

$\boxed{x \equiv 64 \equiv 14 \ (50)}$

$\begin{cases} x \equiv 14 (50) \\ x^2 \equiv 1 \ (5) \\ x^2 \equiv 1 \ (7) \end{cases}$ Poiché 5 e 7 sono primi $x^2 \equiv 1 \ (p) \iff x \equiv \pm 1 \ (p)$

$\begin{cases} x \equiv 14 \ (50) \\ x \equiv \pm 1 \ (5) \\ x \equiv \pm 1 \ (7) \end{cases}$ Il sottosistema $\begin{cases} x \equiv 14 \ (50) \\ x \equiv 1 \ (5) \end{cases}$ non ha perché $(50, 5) = 5 \nmid 14-$

Il sottosistema

$\begin{cases} x \equiv 14 \ (50) \\ x \equiv -1 \ (5) \end{cases}$ ha sol $x \equiv 14$ (

Questo si può vedere in vari modi

1) con il calcolo diretto: $X = 14 + 50k$

$14 + 50k \equiv -1 \quad (5)$

$-1 \equiv -1 \quad (5)$ vera $\forall k$

$\Rightarrow \quad X \equiv 14 \quad (50)$ è soluzio

2) osservando che $X \equiv 14 \ (50) \Rightarrow X \equiv 14 \quad (5)$

$X \equiv -1 \ (5)$

quindi la seconda eq è contenuta nella pri

$$\Rightarrow \begin{cases} X \equiv 14 \ (50) \\ X \equiv \pm 1 \ (70) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \equiv 14 \quad (50) \\ X \equiv 1 \quad (7) \end{cases} \cup \begin{cases} X \equiv 14 \ (5 \\ X \equiv -1 \ (\end{cases}$$

Per il Teorema cinese sappiamo che essendo $(50,7) =$ entrambi i sistemi hanno un'unica soluzione modulo 350. Calcolo le soluzio

- $X \equiv 14 \quad (50) \Leftrightarrow X = 14 + 50k \quad k \in \mathbb{Z}$.

$14 + 50k \equiv 1 \qquad (7)$

$-k \equiv 1 \quad (7) \rightarrow k \equiv -1 \ (7) \quad X \equiv 14 - 50 \quad (35$

$\boxed{X \equiv 36 \ (350)}$

- $x = 14 + 50k \qquad x \equiv 1 \ (7)$

$14 + 50k \equiv -1 \ (7) \qquad -k \equiv -1 \ (7) \quad k \equiv 1 \ (7)$

$\boxed{X \equiv 14 + 50 \equiv 64 \qquad (350)}$

Esercizio 2.

a) Quante sono le matrici $n \times n$ a coefficienti in $\{0, 1, 2\}$ in cui il numero 0 compare esattamente n volte e il numero 1 compare esattamente $n-1$ volte?

b) Quante sono le matrici $n \times n$ a coefficienti in $\{0, 1, 2\}$ con esattamente uno zero in ogni riga e in ogni colonna?

c) Quante sono le matrici $n \times n$ a coefficienti in $\{0, 1\}$ con esattamente $n-2$ zeri e in cui ogni riga e ogni colonna ha al massimo uno zero?

a) Una matrice $n \times n$ ha n^2 coeff

$\binom{n^2}{n} \binom{n^2-n}{n-1} \cdot 1$ ← i coeff rimanenti devono essere 2 → 1 possibilità per ognuno

scelta dei posti dove metto lo 0

posti dove metto l'1

b) Per scegliere la posizione dello 0 ho

n possibilità nella prima colonna

$n-1$ " " 2ª "

$n-2$ " " 3ª "

⋮

1 " colonna n-esima.

Per ognuno degli altri n^2-n coeff ho 2 possibilità $\Rightarrow n!\,2^{n^2-n}$

c) $\binom{n}{2}$ $\underbrace{n(n-1)\ldots 3}$

n° di scelte per le colonne in cui non metto lo 0

n° scelte per la posizione dello zero nella prima delle $n-2$ colonne rimaste

n° scelte per la posizione dello 0 nella seconda delle $n-2$ colonne rimaste

Esercizio 3. Sia M una matrice 2×2 a coefficienti reali con autovalori 3 e 5 e relativi autovettori $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$.

1. Calcolare $M\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$.

2. Trovare una matrice diagonale D e due matrici A ed A^{-1} (una l'inversa dell'altra) tali che $M = ADA^{-1}$.

1. $M\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$, $M\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\-30\end{bmatrix}$. Per trovare $M\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ scriviamo $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ come comb. lineare di $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 2\\3 & -6 & 2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 2\\0 & -12 & -4\end{array}\right] \to \begin{array}{l} x=2-2y=\frac{4}{3}\\ y=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}\end{array}$$

Quindi $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=4/3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$, e

$$M\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=M\left(\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}\right)=\frac{4}{3}M\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}M\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}=\frac{4}{3}\cdot\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}10\\-30\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10/3\\-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22/3\\2\end{bmatrix}$$

2. È noto che $M=VDV^{-1}$, dove V è la matrice degli autovettori $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$. Quindi basta prendere $A=V=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$.

A questo punto possiamo calcolare A^{-1} con la formula per l'inversa di una matrice 2×2,

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}: \quad V^{-1}=\frac{1}{-6-2\cdot3}\begin{bmatrix}-6 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/6\\1/4 & -1/12\end{bmatrix}$$

Soluzione alternativa del punto 1:

Una volta risolto il punto 2., possiamo calcolare

$$M\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = ADA^{-1}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1/6\\1/4 & -1/12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22/3\\2\end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. Siano dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Detto $V = \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $W = \operatorname{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, trovare una base di $V \cap W$.
(b) Completare $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ a una base di $\mathbb{R}^3$.
(c) È possibile completare $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ a una base di $\mathbb{R}^3$?

a) 1. Scriviamo V come kernel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & y \\ 2 & 4 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z-2x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V \Leftrightarrow y-x=z-2x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Quindi $V = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Scriviamo W come kernel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 3 & -2 & y \\ -2 & 4 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & y-3x \\ 0 & 4 & z+2x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & y-3x \\ 0 & 0 & z+2x+2y-6x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad W = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. $V \cap W = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ \hdashline -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcoliamone una base:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 var. libera

$x_2 = \frac{1}{2} x_3$

$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} x_3$

$$V \cap W = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} x_3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Quindi $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base di $V \cap W$.

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ e $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

c. $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, quindi $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono linearmente dipendenti e non possono far parte contemporaneamente di una base di $\mathbb{R}^3$ (perché $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 = 0$ sarebbe una comb. lin. nulla non banale).

Soluzione alternativa di (a):
Visto che $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, $V = \mathrm{span}(\vec{v}_1)$.
$V \cap W$ è un sottospazio incluso in V, quindi può solo avere dimensione 0 (e quindi è $\{\vec{0}\}$), oppure dimensione 1 (e quindi è $V = \mathrm{span}(\vec{v}_1)$).
Il primo caso si verifica se $\vec{v}_1 \notin W$, il secondo se $\vec{v}_1 \in W$. Quindi controlliamo se $\vec{v}_1 \in W$, cioè

se $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ha soluzione:

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ non c'è un pivot nella terza colonna, quindi c'è soluzione

(infatti $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$).