1) La società informatica MilanNet ha deciso di aprire nel territorio pisano sino a n possibili uffici di assistenza ai suoi m clienti. Per questo ha selezionato n possibili siti in cui aprire gli uffici; per ogni sito $i \in I = \{ 1 , \dots , n \}$ si conosce il costo f_i di installazione e la capacità u_i, ossia il numero di chiamate/settimana alle quali può rispondere. Per ogni cliente $j \in J = \{ 1 , \dots , m \}$ è disponibile una stima d_j del numero di chiamate/settimana che genera, ed il costo c_{ij} derivante dalla gestione di una chiamata del cliente j presso il centro i (se aperto), rapportato all'intero intervallo di pianificazione dell'investimento. Per garantire un'alta qualità di servizio si richiede che tutte le chiamate di ogni dato cliente siano sempre gestire dallo stesso centro. MilanNet vole però anche sfruttare i recenti sviluppi nell'Intelligenza Artificiale generativa per installare sistemi "chatbot" avanzati in grado di rispondere autonomamente ad almeno alcune delle richieste dei clienti. Sono disponibili due configurazioni dell'hardware necessario per i chatbot; MilanNet stima che la prima porti ad un'incremento del 20% del costo di installazione di ogni centro a fronte di un incremento del 40% della capacità, mentre la seconda porti un'incremento del 50% del costo a fonte di un incremento del 100% della capacità. Per non spaventare troppo (almeno all'inizio) i sindacati, (giustamente) preoccupati per la possibile perdita di posti di lavoro conseguente all'introduzione delle nuove tecnologie, MilanNet decide di non installarle in più del 30% dei siti che aprirà. Si vuole scrivere come *PLI* il problema di decidere in quali delle n località aprire gli uffici di assistenza, se installarvi l'hardware necessario per i chatbot ed in quale configurazione, e per ciascuno dei siti decidere l'insieme dei clienti assegnati, in modo tale che ogni cliente sia assegnato ad uno ed uno solo degli uffici di assistenza aperti rispettando i corrispondenti vincoli di capacità minimizzando il costo complessivo (di installazione e gestione).

Per formulare il problema occorre introduciamo tre insiemi di variabili binarie:

- le variabili $x_{ij} \in \{ 0 , 1 \}$ per $(i , j) \in I \times J$, per assegnare i clienti agli uffici;
- le variabili $y_i \in \{ 0 , 1 \}$ per $i \in I$, per rappresentare la scelta relativa agli uffici da aprire;
- le variabili $y_i^h \in \{ 0 , 1 \}$ per $i \in I$ e $h \in \{ 1 , 2 \}$, per rappresentare l'installazione dell'hardware necessario per i chatbot nelle due configurazioni possibili.

Parte della formulazione è data dai (classici) vincoli (di semiassegnamento) riportati qua sotto:

$$\begin{array}{ll} \min & \dots \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad j \in J \end{array}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di integralità sulle tre famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti e soli quelli che permettono di completare la formulazione.

A	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} d_j x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i$ (funzione obiettivo)	non aggiungere
B	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i (y_i + 1.2 y_i^1 + 1.5 y_i^2)$ (funzione obiettivo)	non aggiungere
C	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} d_j x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i (y_i + 1.5 y_i^1 + 2.0 y_i^2)$ (funzione obiettivo)	non aggiungere
D	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} d_j x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i (y_i + 1.2 y_i^1 + 1.5 y_i^2)$ (funzione obiettivo)	aggiungere
E	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} d_j y_j x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i (1.2 y_i^1 + 1.5 y_i^2)$ (funzione obiettivo)	non aggiungere
F	$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq u_i (y_i + 1.4 y_i^1 + 2.0 y_i^2) \quad i \in I$	non aggiungere
G	$x_{ij} \leq d_j y_j \quad i \in I \; , \; j \in J$	non aggiungere
H	$\sum_{j \in J} d_j x_{ij} \leq u_i y_i \quad i \in I$	non aggiungere
I	$\sum_{j \in J} d_j x_{ij} \leq u_i (y_i + 1.2 y_i^1 + 1.5 y_i^2) \quad i \in I$	non aggiungere
J	$\sum_{j \in J} d_j x_{ij} \leq u_i (y_i + 1.4 y_i^1 + 2.0 y_i^2) \quad i \in I$	aggiungere
K	$\sum_{j \in J} d_j (y_i + 0.71 y_i^1 + 0.5 y_i^2) x_{ij} \leq u_i \quad i \in I$	non aggiungere
L	$y_i^1 \leq y_i \quad , \quad y_i^2 \leq y_i \quad i \in I$	non aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $y_i + y_i^1 + y_i^2 \leq 1 \qquad i \in I$ aggiungere

$\boxed{\text{N}}$ $\sum_{i \in I} (\, y_i^1 + y_i^2 \,) \,/\, \sum_{i \in I} (\, y_i + y_i^1 + y_i^2 \,) \leq 0.3 \qquad i \in I$ non aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ $\sum_{i \in I} (\, y_i^1 + y_i^2 \,) \leq 0.3 \sum_{i \in I} y_i \qquad i \in I$ non aggiungere

$\boxed{\text{P}}$ $\sum_{i \in I} (\, 0.7 y_i^1 + 0.7 y_i^2 - 0.3 y_i \,) \leq 0 \qquad i \in I$ aggiungere

domanda b) Si discuta come si potrebbe modificare il modello qualora cadesse la condizione secondo cui tutte le chiamate dello stesso cliente devono essere gestite dallo stesso ufficio.

risposta alla domanda b La modifica più semplice consiste nel rilassare il vincolo di integralità sulle variabili x_{ij} in modo tale che risulti solamente $x_{ij} \in [\,0\,,\,1\,]$ (si noti che, per via dei vincoli di semiassegnamento, nessuna di tali variabili può mai avere un valore maggiore di 1, e pertanto sono sufficienti i vincoli $x_{ij} \geq 0$). In questo modo il significato della variabile diviene la frazione di chiamate del cliente j gestite dall'ufficio i, ma il resto del modello non necessita di ulteriori cambiamenti.

Questo vale però se è possibile ignorare il fatto che il numero di chiamate di un determinato cliente gestita da un determinato ufficio possa risultare frazionario nella soluzione ottima, come ovviamente può succedere con questa soluzione. Poiché tale numero è solo una stima di ciò che accadrà nella settimana/tipo questa è probabilmente un'assunzione ragionevole, in particolare se le domande d_j sono "numeri grandi". Questa è una decisione che deve prendere il modellatore sulla base delle sue informazioni e stime di cosa in effetti succederà durante il funzionamento del sistema. Qualora il modellatore ritenesse questa assunzione non ragionevole occorrerebbe invece:

- introdurre variabili $z_{ij} \in \mathbb{Z}$, con il vincolo $z_{ij} \geq 0$ che rappresentino il numero di chiamate del cliente j gestite dall'ufficio i;
- rimpiazzare ovunque nel modello x_{ij} con z_{ij}/d_j, semplificando ove opportuno; ad esempio i vincoli di semiassegnamento divengono

  $$\sum_{i \in I} z_{ij} = d_j \qquad j \in J$$

  il lato sinistro dei vincoli di capacità diviene

  $$\sum_{j \in J} z_{ij} \leq \ldots$$

  ed il frammento della funzione obiettivo relativo alle x_{ij} si trasforma in

  $$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} + \ldots$$