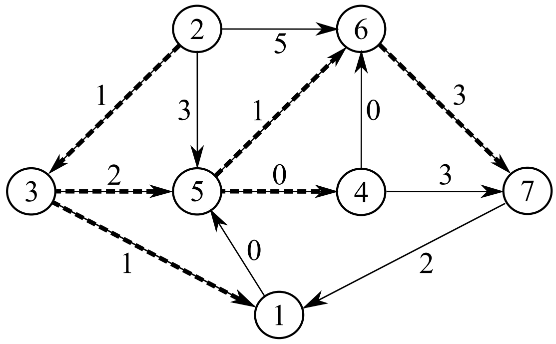
1) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 2 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(6, 7)$ con l'arco $(4, 7)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [2, 0, 1, 3, 3, 4, 7]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 8

B Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(4, 6), (2, 6)\}$ II $\{(1, 5), (7, 1)\}$ III $\{(1, 5), (4, 6), (4, 7)\}$

C Quali sostituzioni di archi bisogna fare con alcuni scelti al punto b) per minimizzare il costo dell'albero risultante?

I $(5, 6)$, $(4, 5)$ con $(4, 6)$, $(4, 7)$ II $(3, 5)$, $(5, 6)$ con $(1, 5)$, $(4, 6)$ III $(3, 5)$ con $(1, 5)$

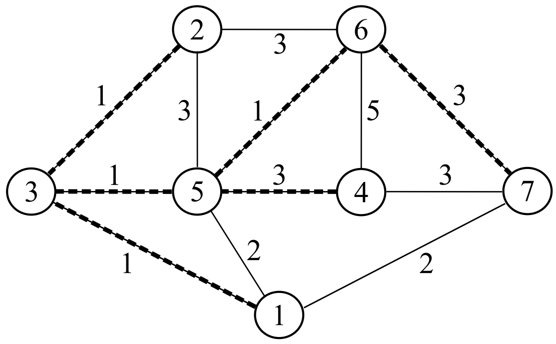
D Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 8 II 14 III 15

E Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché quello dato sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: $c_{15} > 1$ e $c_{54} > 1$ garantiscono che tutte le condizioni di Bellman sono soddisfatte come disuguaglianze, il che implica che l'albero dei cammini minimi sia unico. Alternativamente si può porre $c_{35} < 1$ e $c_{54} > 1$. Non è possibile ottenere il risultato modificando i costi di meno di due archi perché occorre rendere il cammino $3 \to 1 \to 5$ meno conveniente di quello $3 \to 5$ ed il cammino $5 \to 4 \to 6$ meno conveniente di quello $5 \to 6$, il che implica che bisogna modificare almeno un arco per ciascuno dei due cammini. È vero che bisogna anche rendere il cammino $5 \to 4 \to 7$ meno conveniente di $5 \to 6 \to 7$, ma questi condividono archi con cammini precedentemente menzionati e quindi è possibile ottenere il risultato operando su tali cammini, come mostrano le soluzioni suggerite.

2) Per il problema del dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{6, 7\}$ con il lato $\{2, 6\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esistono altri 3 alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello dato e differiscono per al più due lati

II Nessuna delle due

B Quale lato non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno   II $\{4, 5\}$ III $\{6, 7\}$

C Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1, 7\}$ e $\{4, 7\}$ II $\{1, 7\}$ III $\{1, 5\}$ e $\{2, 6\}$

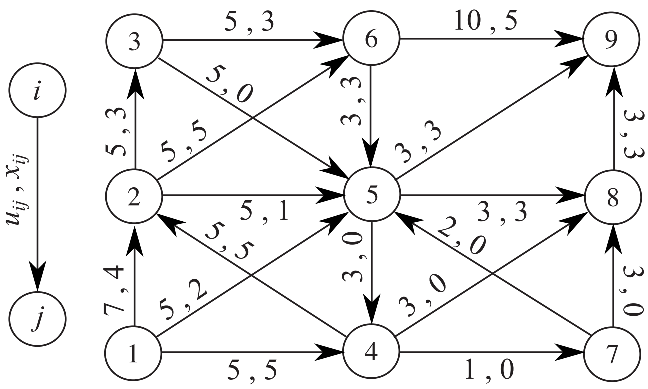
D Quali sostituzioni di lati bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

I $\{4, 6\}$, $\{4, 5\}$ e $\{5, 7\}$ con $\{5, 6\}$ e $\{4, 7\}$ II $\{4, 5\}$ con $\{4, 7\}$ III $\{6, 7\}$ con $\{1, 7\}$

E Modificare il costo del minor numero possibile di lati affinché quello dato sia l'unico albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta.

Risposta: $c_{47} > 3$ e $c_{17} > 3$ garantiscono che qualsiasi lato $\{i, j\}$ fuori dall'albero abbia costo strettamente maggiore di tutti gli altri lati del ciclo che si viene a formate quando $\{i, j\}$ viene aggiunto all'albero (condizione di ottimalità per cicli), il che implica che l'albero è l'unica soluzione ottima del problema.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 9 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 10 II non ammissibile III ammissibile di valore 11

B Quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo rispetto al flusso dato:

I $1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 9$ II $1 \to 2 \to 5 \to 9$ III $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 9 \to 8$

C Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 20:

I $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ II $N_s = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ III $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$

D Dopo aver, se necessario, reso il flusso ammissibile modificandolo sul minor numero possibile di archi si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il valore del flusso massimo è:

I 11 II 13 III 16

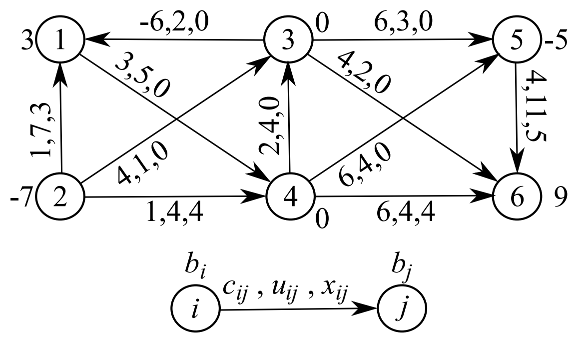
E Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:

I $N_t = \{9\}$ II $N_s = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ III $N_s = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$

F Quanti modi diversi ci sono di aumentare di un'unità la capacità di un singolo arco per fare un modo che il valore del flusso massimo aumenti anch'esso di un'unità? E come cambia la risposta per due unità? Giustificare tutte le risposte.

Risposta: esistono tre tagli (N_s, N_t) di capacità minima pari a 16, ossia $N_t = \{9\}$, $N_t = \{6, 9\}$, $N_t = \{3, 6, 9\}$, che hanno in comune gli archi $(5, 9)$ ed $(8, 9)$. Pertanto, è possibile costruire un flusso massimo di capacità 17 o portando la capacità di $(5, 9)$ a 4 (ed usando il cammino $1 \to 2 \to 5 \to 9$, che diviene allora aumentante) o portando la capacità di $(8, 9)$ a 4 (ed usando il cammino $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 9$, che diviene allora aumentante). Invece non ci può essere nessun modo di aumentare la capacità di un singolo arco di due unità e costruire in questo modo un flusso massimo di valore 18, perché il taglio con $N_s = \{1\}$ ha capacità 17 ed è completamente disgiunto da tutti i tagli di capacità 16.

4) Per il problema dello flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[3, -7, 0, 0, -5, 9]$ II $[-3, 7, 0, 0, 5, -9]$ III $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 108 II 51 III 79

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 4 \to 3 \to 1$ II $4 \to 6 \to 5 \to 4$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 1$ II $1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4 \to 2$ III nessuno dei due

E Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

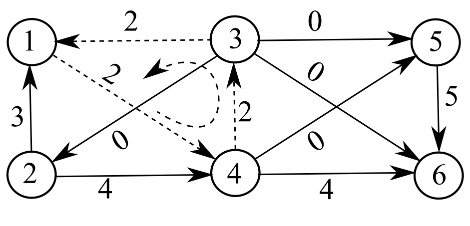
I $1 \to 3 \to 4 \to 1$ II $3 \to 6 \to 4 \to 3$ III $2 \to 4 \to 3 \to 2$

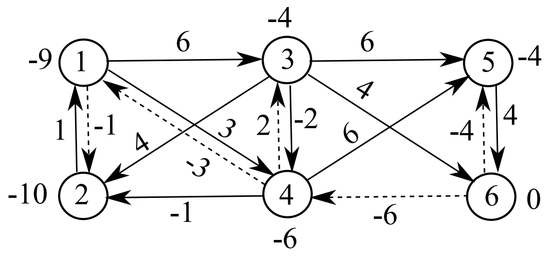
F Si dica se lo pseudoflusso è oppure no minimale, ed altrimenti si indichi come costruirne uno per il corrente vettore di sbilanciamenti. Una volta individuato lo pseudoflusso minimale si dimostri che è tale e si discuta se esso sia oppure no unico. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso (in realtà, flusso ammissibile) non è minimale (ottimo) perchè esiste il ciclo $C = 1 \to 4 \to 3 \to 1$ che è aumentante, in quanto ha capacità

$$\theta(\, C \,,\, x \,) = \min\{\, u_{14} - x_{14} \,,\, u_{43} - x_{43} \,,\, u_{31} - x_{31} \,\} = \min\{\, 5 - 0 \,,\, 4 - 0 \,,\, 2 - 0 \,\} = 2 > 0$$

ed ha costo $C(\, C\,) = c_{14} + c_{43} + c_{31} = 3 + 2 - 6 = -1 < 0$. Inviando due unità di flusso lungo C si ottiene il flusso ammissibile $x' = x \oplus 2C$ illustrato in figura qui sotto a sinistra, che è ottimo. Per dimostrarlo basta costruire il grafo residuo rispetto a x' e calcolarne l'albero dei cammini minimi, che sono mostrati accanto a destra (gli archi tratteggiati sono quelli dell'albero) insieme al vettore di etichette che rispetta le condizioni di Bellman. Questo dimostra che sul grafo residuo non esistono cicli orientati di costo negativo, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto al flusso x'.





Il flusso x' è pertanto ottimo (pseudoflusso minimale rispetto al corrente vettore degli sbilanciamenti, ossia tutti nulli)), ma non è l'unico. Infatti esiste il ciclo $C' = 4 \to 3 \to 6 \to 4$ che è aumentante (rispetto ad x', ed in effetti anche rispetto ad x), in quanto ha capacità

$$\theta(\, C' \,,\, x' \,) = \min\{\, u_{43} - x'_{43} \,,\, u_{36} - x'_{36} \,,\, x'_{46} \,\} = \min\{\, 4 - 0 \,,\, 2 - 0 \,,\, 4 \,\} = 2 > 0$$

ed ha costo $C(\, C' \,) = c_{43} + c_{36} - c_{64} = 2 + 4 - 6 = 0$: inviando lungo C' una qualsiasi quntità di flusso $0 < \theta \leq \theta(\, C' \,,\, x' \,)$ si ottengono altri flussi ammissibili $x'(\,\theta\,) = x' \oplus \theta C'$ che sono tutti ottimi e diversi da x'. Ciò poteva essere notato esaminando il grafo residuo, in quanto l'arco $(\, 3 \,,\, 6 \,)$ non fa parte dell'albero dei cammini minimi ma rispetta le condizioni di Bellman all'uguaglianza: $d_3 + c_{36} = 4 + (-4) = 0 = d_6$.