Nome: **Cognome:** **Matricola:**

1) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto ed il corrispondente problema duale (D).

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

A Quali delle seguenti coppie di soluzioni soddisfano la condizione degli scarti complementari per qualsiasi valore di α e β?

I $x = [\,0\,,\,1\,]$, $y = [\,0\,,\,0\,,\,\alpha - \beta\,,\,0\,,\,\alpha + \beta\,]$

II $x = [\,0\,,\,1\,]$, $y = [\,\alpha - \beta\,,\,2\beta - \alpha\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$

III $x = [\,0\,,\,1\,]$, $y = [\,\alpha\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,\alpha - \beta\,]$

B Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = [\,0\,,\,1\,]$ è ottima per (P)?

I $\alpha \geq \beta \geq 0$ — II $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ — III $\beta \leq \alpha \leq 2\beta$

C Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = [\,1\,,\,0\,]$ è ottima per (P)?

I nessuna — II $\alpha = 1$, $\beta = 1$ — III $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 2\beta$

D Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

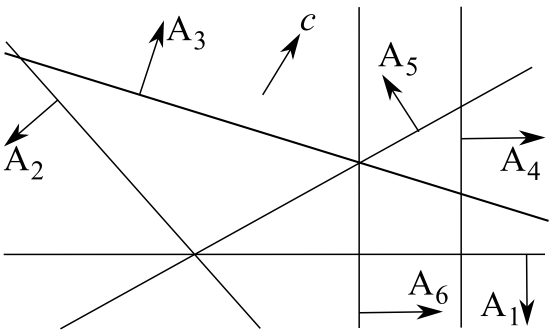
I l'insieme è vuoto — II $\{\,[\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]\,\}$ — III $\{\,[\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]\,\}$

E Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual delle seguenti affermazioni è corretta?

I la soluzione duale è degenere — II la soluzione primale è degenere — III nessuna delle precedenti

F Si scelgano valori per α e β tali che $\bar{y} = [\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$ sia una soluzione ottima per (D). Giustificare la risposta.

2) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto.



A Per $B = \{ 4 , 6 \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale non ammissibile III non è una base

B Per $B = \{ 1 , 2 \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III entrambe le cose sono vere

C Per $B = \{ 4 , 5 \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

D Se la base corrente è $B = \{ 2 , 5 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 5$ è

I ammissibile II di crescita III nessuna delle due cose

E Se la base corrente è $B = \{ 1 , 2 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

I ammissibile II di crescita III entrambe le cose

F Se la base corrente è $B = \{ 1 , 5 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

I ammissibile II di crescita III entrambe le cose

G Se la base corrente è $B = \{ 1 , 6 \}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è

I $h = 1$ II $h = 6$ III nessuno (l'algoritmo termina)

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{ 3 , 5 \}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

3) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, al problema di PL dato qui accanto.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

A Per $B = \{ 1 , 2 \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile   II è una base duale degenere   III entrambe le cose

B Per $B = \{ 1 , 3 \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile   II è una base duale degenere   III nessuna delle due cose

C Per $B = \{ 3 , 4 \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile   II è una base primale ammissibile   III nessuna delle due cose

D Per $B = \{ 1 , 4 \}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 4$ III $k = 5$

E Per $B = \{ 1 , 4 \}$, la direzione di decrescita determinata dall'algoritmo è

I $d = [\, 1/2 \, , \, 1/2 \,]$ II $d = [\, -1/2 \, , \, 0 \, , \, 0 \, , \, -1/2 \, , \, 0 \,]$ III $d = [\, -1/2 \, , \, 0 \, , \, 0 \, , \, -1/2 \, , \, 1 \,]$

F Si mostri che la base $B = \{ 1 , 5 \}$ è ottima sia per il problema dato che per quello in cui il costo della variabile x_2 è 1 invece che 2. Si individui poi l'insieme di tutte le soluzioni ottime, sia primali che duali, per il problema modificato. Giustificare algebricamente tutte le risposte.

4) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0\,,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{\, x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4 \,\}$ II $\{\, x_2\,, x_3\,, x_4\,, x_1 \,\}$ III $\{\, x_3\,, x_4\,, x_1\,, x_2 \,\}$

B Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $[\,0\,,1\,,1\,,0\,]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema ha componenti frazionarie

III La soluzione ottima del rilassamento continuo non cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 6

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 16$ II $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 47/3$ III $\underline{z} = 12$, $\bar{z} = 47/3$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_4, x_1, x_3 II x_4, x_3 III x_4

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due nodi dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 14$, $\bar{z} = 47/3$ II $z = 14$, $\bar{z} = 14$ III $z = 14$, $\bar{z} = 77/5$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I $[\,1\,,1\,,1\,,0\,]$ II $[\,1\,,1\,,0\,,1\,]$, $[\,0\,,0\,,1\,,1\,]$ III $[\,1\,,1\,,1\,,0\,]$, $[\,1\,,1\,,0\,,1\,]$, $[\,0\,,0\,,1\,,1\,]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibiltà

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude almeno un nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H Per quanti oggetti è possibile modificare il solo loro rendimento in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.