1) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto ed il corrispondente problema duale (D).

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

A Quali delle seguenti coppie di soluzioni soddisfano la condizione degli scarti complementari per qualsiasi valore di α e β?

I $x = [\,0\,,\,1\,]$, $y = [\,0\,,\,0\,,\,\alpha-\beta\,,\,0\,,\,\alpha+\beta\,]$

II $x = [\,0\,,\,1\,]$, $y = [\,\alpha-\beta\,,\,2\beta-\alpha\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$

III $x = [\,0\,,\,1\,]$, $y = [\,\alpha\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,\alpha-\beta\,]$

B Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = [\,0\,,\,1\,]$ è ottima per (P)?

I $\alpha \geq \beta \geq 0$ II $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ III $\beta \leq \alpha \leq 2\beta$

C Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = [\,1\,,\,0\,]$ è ottima per (P)?

I nessuna II $\alpha = 1$, $\beta = 1$ III $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 2\beta$

D Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I l'insieme è vuoto II $\{\,[\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]\,\}$ III $\{\,[\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]\,\}$

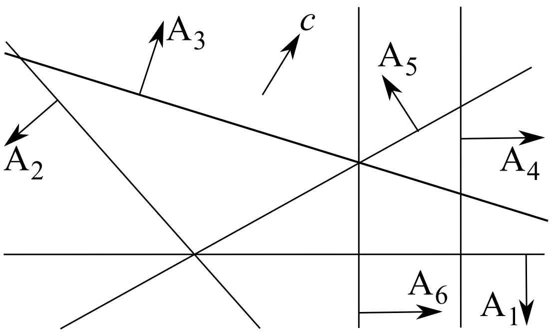
E Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual delle seguenti affermazioni è corretta?

I la soluzione duale è degenere II la soluzione primale è degenere III nessuna delle precedenti

F Si scelgano valori per α e β tali che $\bar{y} = [\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$ sia una soluzione ottima per (D). Giustificare la risposta.

Risposta: $\bar{y}$ è ammissibile se e solo se $\alpha = 3$, $\beta = 2$: in questo caso risulta anche ottima in quanto soddisfa la condizione degli scarti complementari con la soluzione primale ammissibile $x = [\,0\,,\,1\,]$.

2) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto.



A Per $B = \{\, 4\, ,\, 6\, \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile   II è una base primale non ammissibile   III non è una base

B Per $B = \{\, 1\, ,\, 2\, \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile   II è una base primale degenere   III entrambe le cose sono vere

C Per $B = \{\, 4\, ,\, 5\, \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile   II è una base duale degenere   III entrambe le cose sono vere

D Se la base corrente è $B = \{\, 2\, ,\, 5\, \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 5$ è

I ammissibile   II di crescita   III nessuna delle due cose

E Se la base corrente è $B = \{\, 1\, ,\, 2\, \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

I ammissibile   II di crescita   III entrambe le cose

F Se la base corrente è $B = \{\, 1\, ,\, 5\, \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

I ammissibile   II di crescita   III entrambe le cose

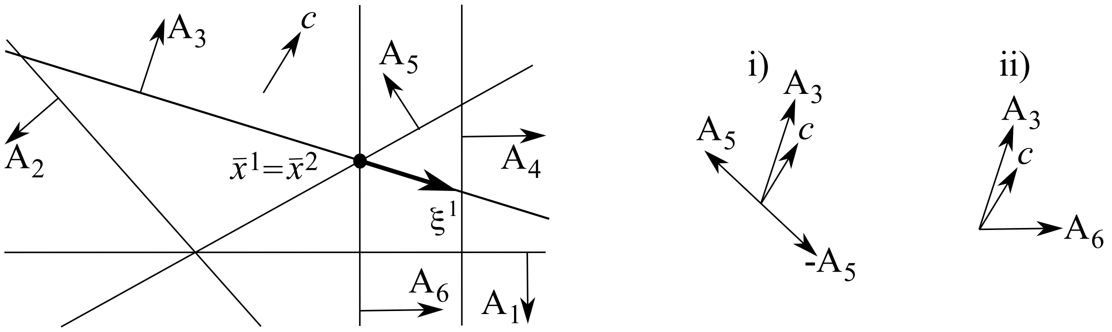
G Se la base corrente è $B = \{\, 1\, ,\, 6\, \}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è

I $h = 1$ II $h = 6$ III nessuno (l'algoritmo termina)

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\, 3\, ,\, 5\, \}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Risposta: La soluzione di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 3 e 5). La base è primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti c appartiene a *cono*$(\, \{\, A_3\, ,\, -A_5\, \}\,)$, come mostrato in i), e quindi $\bar{y}_3 > 0$ ma $\bar{y}_5 < 0$: pertanto, $h = 5$. La direzione ξ^1 è mostrata in figura qui sotto: è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c), ma non ammissibile. Infatti ha prodotto scalare positivo (forma un angolo minore di 90 gradi) con A_6, vincolo attivo ma non in base. Ovviamente il massimo passo lungo ξ^1 è nullo (passo degenere) e quindi $k = 6$.

Alla seconda iterazione la base è quindi $B = \{\, 3\, ,\, 6\, \}$. La corrispondente soluzione di base $\bar{x}^2$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 3 e 6, ed è quindi la stessa della $\bar{x}^1$ della prima iterazione (infatti si è fatto un passo degenere). La base è però è duale ammissibile: infatti c appartiene a *cono*$(\, \{\, A_3\, ,\, A_6\, \}\,)$, come mostrato in ii), e quindi $\bar{y}_3 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$. Pertanto $\bar{x}^2$ è una soluzione ottima del primale (quindi lo era anche $\bar{x}^1$, ma la base non permetteva di certificarlo), e l'algoritmo termina.



3) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, al problema di PL dato qui accanto.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

A Per $B = \{1, 2\}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile — II è una base duale degenere — III entrambe le cose

B Per $B = \{1, 3\}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile — II è una base duale degenere — III nessuna delle due cose

C Per $B = \{3, 4\}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile — II è una base primale ammissibile — III nessuna delle due cose

D Per $B = \{1, 4\}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ — II $k = 4$ — III $k = 5$

E Per $B = \{1, 4\}$, la direzione di decrescita determinata dall'algoritmo è

I $d = [1/2, 1/2]$ — II $d = [-1/2, 0, 0, -1/2, 0]$ — III $d = [-1/2, 0, 0, -1/2, 1]$

F Si mostri che la base $B = \{1, 5\}$ è ottima sia per il problema dato che per quello in cui il costo della variabile x_2 è 1 invece che 2. Si individui poi l'insieme di tutte le soluzioni ottime, sia primali che duali, per il problema modificato. Giustificare algebricamente tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{1, 5\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [1, 2] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1, 1] \quad , \quad \bar{y}_N = 0 \quad \bar{y} = [1, 0, 0, 0, 1]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, $\bar{x} = [0, 4]$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [1, 0, 0, 0, 1]$ è una soluzione ottima duale.
Se il costo di x_2 valesse 1 invece che 2, la base $B = \{1, 5\}$ resterebbe primale ammissibile (ovviamente, poiché b_B non cambia), e continuerebbe a essere duale ammissibile in quanto si avrebbe

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [1, 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0, 1] \ .$$

$\bar{x} = [0, 4]$ sarebbe quindi una soluzione ottima per il primale modificato; poiché $\bar{x}$ è una soluzione di base primale non degenere, $\bar{y} = [0, 0, 0, 0, 1]$ è l'unica soluzione ottima del duale modificato. Poiché tale $\bar{y}$ è degenere, invece, la soluzione ottima del primale modificato potrebbe non essere unica. Infatti, essendo $\bar{y}_5 > 0$, per il Teorema degli scarti complementari le soluzioni ottime del primale modificato sono tutte e sole le soluzioni primali ammissibili tali che $x_1 + x_2 = 4$; ovvero, le soluzioni ammissibili della forma $x(\alpha) = [\alpha, 4 - \alpha]$. Imponendo l'ammissibilità di $x(\alpha)$ nei quattro vincoli rimanenti si ottiene

$$4 - \alpha \leq 4 \equiv \alpha \geq 0 \ , \ \alpha \leq 2 \ , \ -\alpha - 2(4 - \alpha) \leq 5 \equiv \alpha \leq 13 \ , \ 2\alpha + (4 - \alpha) \leq 6 \equiv \alpha \leq 2 \ .$$

Pertanto, le soluzioni $x(\alpha)$ per $0 \leq \alpha \leq 2$ sono tutte e sole quelle ottime per il problema primale modificato.

4) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ II $\{x_2, x_3, x_4, x_1\}$ III $\{x_3, x_4, x_1, x_2\}$

B Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $[0, 1, 1, 0]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema ha componenti frazionarie

III La soluzione ottima del rilassamento continuo non cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 6

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 16$ II $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 47/3$ III $\underline{z} = 12$, $\bar{z} = 47/3$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_4, x_1, x_3 II x_4, x_3 III x_4

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due nodi dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 14$, $\bar{z} = 47/3$ II $z = 14$, $\bar{z} = 14$ III $z = 14$, $\bar{z} = 77/5$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I $[1, 1, 1, 0]$ II $[1, 1, 0, 1]$, $[0, 0, 1, 1]$ III $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 1]$, $[0, 0, 1, 1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibiltà

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude almeno un nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H Per quanti oggetti è possibile modificare il solo loro rendimento in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.

Risposta: Occorre che il rilassamento continuo determini una soluzione intera. Questo è possibile solamente se la somma dei pesi degli elementi selezionati è esattamente pari alla capacità dello zaino, ossia 8. Ci sono solamente due soluzioni ammissibili con questa proprietà, ossia $x' = [0, 0, 1, 1]$ ed $x'' = [1, 1, 1, 0]$. Occorre quindi fare in modo che nell'ordinamento per rendimenti decrescenti le prime variabili risultino x_3 e x_4 (in qualsiasi ordine), di modo tale che l'algoritmo individui la soluzione x', oppure x_1, x_2, x_3 (in qualsiasi ordine), di modo tale che l'algoritmo individui la soluzione x''. Considerando che l'ordinamento di partenza è $\{x_2, x_3, x_4, x_1\}$, possiamo quindi modificare:

1. il rendimento del primo oggetto per ottenere i tre ordinamenti equivalenti $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_3, x_1, x_4\}$;
2. il rendimento del secondo oggetto per ottenere i due ordinamenti equivalenti $\{x_3, x_4, x_2, x_1\}$, $\{x_3, x_4, x_1, x_2\}$;
3. il rendimento del quarto oggetto per ottenere l'ordinamento $\{x_2, x_3, x_1, x_4\}$.

In totale quindi questo è possibile per solo 3 oggetti, in quanto modificare il rendimento del terzo oggetto in qualsiasi modo non permette di ottenere nessuno degli ordinamenti desiderati.