1) Un canale televisivo locale sta attraversando una grave crisi di ascolti: lo share complessivo è crollato negli ultimi mesi. Per risollevare le sorti dell'azienda e attirare nuovi contratti pubblicitari, il direttore (che è anche responsabile del palinsesto e dei programmi) sta progettando di cambiare la programmazione del canale: in particolare, vorrebbe affiancare alla consueta edizione del TG anche una rubrica di approfondimento pomeridiana. Il direttore (che è anche responsabile della programmazione economica dell'azienda televisiva) vorrebbe definire la scaletta di una prima puntata pilota della rubrica pomeridiana, non sforando lo striminzito budget già preventivato. Sempre il direttore (che è anche capo-redattore) ha selezionato in insieme $J = \{1, \dots, n\}$ di possibili servizi televisivi da trasmettere nel TG o nella rubrica, ed ha a disposizione in insieme $I = \{1, \dots, m\}$ di giornalisti nella sua redazione. Ogni possibile servizio $j \in J$ prevede un costo di retribuzione c_{ij} se svolto dal giornalista $i \in I$, comprensivo degli oneri di trasferta ed un ritorno pubblicitario d_j se viene trasmesso nel TG e h_j se viene trasmesso durante la rubrica. Per ragioni di tempo, inoltre, non possono essere mandati in onda più di t servizi nel TG e r nella rubrica. Per non annoiare il suo (già esiguo) pubblico, il direttore prevede di trasmettere nella rubrica pomeridiana servizi diversi da quelli del TG. Per rimpinguare le casse aziendali il direttore pensa inoltre di vendere i servizi televisivi coperti da una squadra, ma non mandati in onda, ad un'altra emittente televisiva: nel qual caso incasserebbe e_j per ogni servizio $j \in J$ venduto. Infine, il direttore (il factotum dell'azienda) ha anche ordinato gli argomenti dei servizi per ordine non crescente di importanza (ossia, il servizio $j = 1$ è più importante del servizio $j = 2$ e così via), in modo tale che se un certo servizio viene coperto da almeno una squadra, anche quelli di maggiore importanza siano coperti. Il direttore (che è anche un cultore di ricerca operativa) vuole scrivere un modello matematico di PLI per il suo problema di massimizzazione dei guadagni netti (ricavi - costi), rispettando tutti vincoli che via via è andato definendo.

Scelte le famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il giornalista } i \text{ copre il servizio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in I \;,\; j \in J$$

$$k_j = \begin{cases} 1 & \text{se il servizio } j \text{ viene trasmesso nella rubrica} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{se il servizio } j \text{ viene trasmesso nel TG} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il servizio } j \text{ viene venduto ad un'altra emittente} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \max \quad & \dots \\ & \textstyle\sum_{j \in J} z_j \le t \\ & \textstyle\sum_{j \in J} k_j \le r \end{aligned}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di integralità e bounds sulle quattro famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

A	$\sum_{j \in J} x_{ij} \le 1 \quad i \in I$	non aggiungere
B	$\sum_{i \in I} x_{ij} \le 1 \quad j \in J$	aggiungere
C	$\sum_{i \in I} x_{ij} = z_j + k_j + y_j \quad j \in J$	aggiungere
D	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} \le 1$	non aggiungere
E	$z_j + k_j \ge 1 \quad j \in J$	non aggiungere
F	$z_j + k_j = 1 \quad j \in J$	non aggiungere
G	$y_j \ge y_{j-1} \quad j \in J \setminus \{1\}$	non aggiungere
H	$y_j \le y_{j-1} \quad j \in J \setminus \{1\}$	non aggiungere
I	$z_j + k_j \ge z_{j-1} + k_{j-1} \quad j \in J \setminus \{1\}$	non aggiungere

$\boxed{\text{J}}$ $\sum_{i\in I} x_{ij} \leq \sum_{i\in I} x_{ij-1} \quad j \in J \setminus \{\, 1 \,\}$ aggiungere

$\boxed{\text{K}}$ $x_{ij} \geq x_{ij-1} \quad i \in I \;\;,\;\; j \in J \setminus \{\, 1 \,\}$ non aggiungere

$\boxed{\text{L}}$ $x_{ij} \geq x_{ij-1}(1 - y_{j-1}) \quad i \in I \;\;,\;\; j \in J \setminus \{\, 1 \,\}$ non aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $\sum_{j\in J}(\, d_j z_j + h_j k_j + e_j y_j \,) - \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij}$ (funzione obiettivo) aggiungere

$\boxed{\text{N}}$ $\sum_{j\in J}(\,(\, d_j z_j + h_j k_j + e_j y_j \,) \sum_{i\in I} x_{ij} \,) - \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ $\sum_{j\in J}(\, d_j + h_j \,)(\, 1 - y_j \,) + e_j y_j - \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) Si consideri ora una nuova policy: tutti i servizi girati devono necessariamente essere mandati in onda. Esprimere questo vincolo in almeno due modi differenti.

risposta alla domanda b La condizione logica sarebbe $x_{ij} > 0 \Longrightarrow z_j + k_j = 1$, che può essere modellata ad esempio mediante uno dei seguenti vincoli:

$$x_{ij} \leq z_j + k_j \quad i \in I \;\;,\;\; j \in J$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq z_j + k_j \quad j \in J\,.$$

2) La Società Cibernetica Sirio (SCS) sta pianificando la costruzione del suo nuovo, grande stabilimento per la produzione di androidi con Personaltà di Persona Vera. La produzione degli androidi è divisa in cinque reparti: montaggio (M), installazione software (I), test (T), lobotomizzazione preventiva (L), e distruzione accelerata (D). Nello stabilimento sono presenti cinque aree, numerate da 1 a 5, ciascuna delle quali può ospitare uno qualunque dei reparti. Uno dei principali limiti alla produttività nella SCS è la necessità di spostare gli androidi parzialmente prodotti dall'uno all'altro dei reparti. Per ogni coppia $\{ i , j \}$ di reparti, con $i \neq j$, si conosce il numero s_{ij} di androidi (nell'unità di tempo) che devono spostarsi da i a j. Per ogni coppia $\{ h , k \}$ di aree, con $h \neq k$, il tempo necessario a spostarsi da h a k è una funzione che dipende dalla quantità di androidi che vengono spostati. In particolare, per effetto della congestione il tempo di spostamento dei primi androidi fino alla capacità nominale di trasporto u_{hk} è t_{hk}, ma diviene $1.5t_{hk}$ per quelli oltre u_{hk}. Si formuli come *PLI* il problema di decidere in quale area alloggiare ogni reparto in modo tale da minimizzare il tempo totale speso nel trasporto degli androidi.

Introducendo le variabili

- $x_{ih} \in \{ 0 , 1 \}$, per $i \in R = \{ M , I , T , L , D \}$ e $h \in A = \{ 1 , \dots , 5 \}$, col significato che $x_{ih} = 1$ se il reparto i viene assegnato all'area h;
- v^0_{hk} e v^1_{hk}, per $h \in A$ e $k \in A \setminus \{ h \}$, che indicano le quantità (non negative) di androidi che si muovono dall'area h all'area k rispettivamente entro la capacità nominale di trasporto u_{hk} ed oltre ad essa;

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & \dots & \\ & \sum_{i \in R} x_{ih} = 1 & h \in A \\ & \sum_{h \in A} x_{ih} = 1 & i \in R \\ & v^0_{hk} \leq u_{hk} & h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \} \end{array}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di integralità e bounds sulle due famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

A $v^0_{hk} + v^1_{hk} \leq \sum_{i \in R} \sum_{j \in R \setminus \{ i \}} s_{ij} \; x_{ih} x_{jk} \quad h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

B $v^0_{hk} + v^1_{hk} = \sum_{i \in R} \sum_{j \in R \setminus \{ i \}} s_{ij} \; x_{ih} x_{jk} \quad h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

C $y_{ijhk} \in \{ 0 , 1 \} \quad i \in R \;,\; j \in R \setminus \{ i \} \;,\; h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — aggiungere

D $y_{ijhk} \geq x_{ih} \, x_{jk} \quad i \in R \;,\; j \in R \setminus \{ i \} \;,\; h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

E $v^0_{hk} + v^1_{hk} = \sum_{i \in R} \sum_{j \in R \setminus \{ i \}} s_{ij} \; y_{ijhk} \quad h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — aggiungere

F $y_{ijhk} \geq x_{ih} \;,\; y_{ijhk} \geq x_{jk} \quad i \in R \;,\; j \in R \setminus \{ i \} \;,\; h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

G $y_{ijhk} \leq x_{ih} \;,\; y_{ijhk} \leq x_{jk} \quad i \in R \;,\; j \in R \setminus \{ i \} \;,\; h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — aggiungere

H $y_{ijhk} \geq x_{ih} + x_{jk} - 1 \quad i \in R \;,\; j \in R \setminus \{ i \} \;,\; h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — aggiungere

I $y_{ijhk} \leq 2 - x_{ih} - x_{jk} \quad i \in R \;,\; j \in R \setminus \{ i \} \;,\; h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

J $z_{hk} \in \{ 0 , 1 \} \quad h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

K $v^0_{hk} \leq u_{hk} z_{hk} \quad h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

L $v^1_{hk} \leq 2 u_{hk} z_{hk} \quad h \in A \;,\; k \in A \setminus \{ h \}$ — non aggiungere

M $\sum_{h \in A} \sum_{k \in A \setminus \{ h \}} t_{hk} v^0_{hk} - 0.5 t_{hk} u_{uk} z_{hk} + 1.5 t_{hk} v^1_{hk}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

N $\sum_{i \in R} \sum_{j \in R \setminus \{ i \}} \sum_{h \in A} \sum_{k \in A \setminus \{ h \}} s_{ij} \; t_{hk} \; y_{ijhk}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ $\sum_{h \in A} \sum_{k \in A \setminus \{ h \}} t_{hk} v^0_{hk} + 1.5 t_{hk} v^1_{hk}$ (funzione obiettivo) aggiungere

$\boxed{\text{P}}$ $\sum_{i \in R} \sum_{j \in R \setminus \{ i \}} \sum_{h \in A} \sum_{k \in A \setminus \{ h \}} s_{ij}\ t_{hk}\ x_{ih}\ x_{jk}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{Q}}$ $\sum_{h \in A} \sum_{k \in A \setminus \{ h \}} t_{hk} v^0_{hk} + 0.5 t_{hk} (\, s_{ij}\ x_{ih} / u_{hk}\ ) v^1_{hk}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) È possibile modellare il problema senza utilizzare entrambi gli insiemi di variabili v^0_{hk} e v^1_{hk}? Se si, come?

risposta alla domanda b La funzione obiettivo è la somma delle funzioni convesse

$$f_{hk}(\, v_{hk}\,) = \begin{cases} t_{hk} v_{hk} & \text{se } 0 \leq v_{hk} \leq u_{hk} \\ t_{hk} u_{hk} + 1.5 t_{hk} (\, v_{hk} - u_{hk}\,) & \text{se } u_{hk} \leq v_{hk} \end{cases} \quad ,$$

dove v_{hk} è la quantità di androidi che si muovono da h a k, che può essere semplicemente definita da

$$v_{hk} = \sum_{i \in R} \sum_{j \in R \setminus \{ i \}} s_{ij}\ y_{ijhk}$$

con gli opportuni vincoli (lineari) che fanno si che $y_{ijhk} = x_{ih}\ x_{jk}$. Come tutte le funzioni convesse, $f_{hk}(\cdot)$ può essere espressa come massimo di funzioni lineari; in questo caso

$$f_{hk}(\, v_{hk}\,) = \max\{\, t_{hk} v_{hk}\,,\ 1.5 t_{hk} v_{hk} - 0.5 t_{hk} u_{hk}\,\}$$

che può essere facilmente espresso con una variabile ausiliaria z_{hk} come

$$z_{hk} \geq t_{hk} v_{hk} \quad , \quad z_{hk} \geq 1.5 t_{hk} v_{hk} - 0.5 t_{hk} u_{hk} \quad .$$

Si può quindi far diventare la funzione obiettivo

$$\sum_{h \in A} \sum_{k \in A \setminus \{ h \}} z_{hk}$$

ed eliminare v^0_{hk} e v^1_{hk}. Questo parrebbe lasciare lo stesso numero di variabili, ma v_{hk} può essere eliminata sostituendola nei vincoli che definiscono le z_{hk} con l'espressione lineare che la definisce.