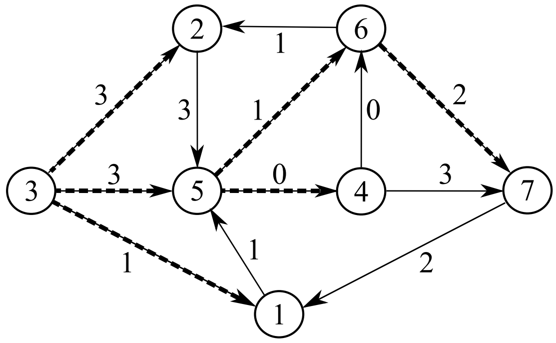
1) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 3 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(3, 5)$ con l'arco $(2, 5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [1, 3, 0, 3, 0, 1, 2]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 20

B Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(4, 6), (6, 2), (4, 7)\}$ II $\{(1, 5), (4, 7)\}$ III $\{(1, 5), (4, 6)\}$

C Qual è il minor numero di archi da sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I 1 II 2 III 3

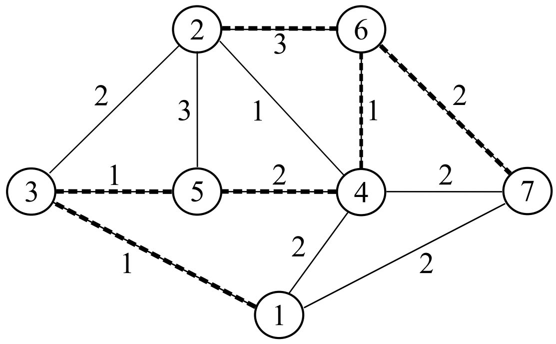
D Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 14 II 16 III 20

E Modificare il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte, basta modificare tra gli archi dell'albero $c_{35} \leq 2$ e $c_{56} \leq 0$, oppure tra gli archi fuori dall'albero $c_{15} \geq 2$ e $c_{46} \geq 1$.

2) Per il problema del dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{6, 7\}$ con il lato $\{1, 7\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esistono esattamente altri 3 alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quale lato non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno II $\{6, 7\}$ III $\{2, 6\}$

C Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1, 7\}$ e $\{2, 3\}$ II $\{1, 7\}$ III $\{2, 4\}$ e $\{2, 3\}$

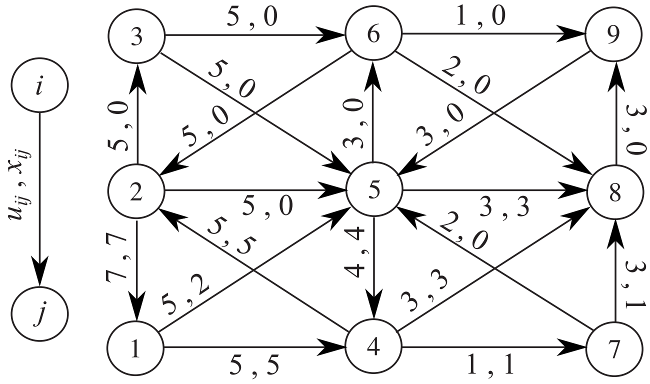
D Quali sostituzioni di lati bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

I $\{4, 5\}$ e $\{6, 7\}$ con $\{1, 4\}$ e $\{1, 7\}$ II $\{2, 6\}$ con $\{2, 3\}$ III $\{2, 6\}$ con $\{2, 4\}$

E Modificare il costo del minor numero possibile di lati affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{1, 7\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero. Giustificare la risposta.

Risposta: La condizione $c_{26} \leq 1$ garantisce che qualsiasi lato $\{i, j\}$ dell'albero abbia costo minore di tutti gli altri lati del taglio che si viene a formate quando $\{i, j\}$ viene eliminato all'albero (condizione di ottimalità per tagli), il che implica che l'albero è una soluzione ottima del problema. Scambiando il lato $\{1, 7\}$ con un altro lato dell'albero, si possono ottenere altri 2 alberi di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{1, 7\}$ sono presenti un altri 2 lati di costo 2.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 2 al nodo 8 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 7 II non ammissibile III ammissibile di valore 2

B Ponendo $x_{25} = 5$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 7 II non ammissibile III ammissibile di valore 12

C Ponendo $x_{42} = 0$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 7 II non ammissibile III ammissibile di valore 2

D Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei tre punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $2 \to 5 \to 6 \to 8$ II $2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$ III $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 8$

E Quale dei seguenti tagli $(N_s\,,N_t)$ mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 10:

I $N_s = \{3\}$ II $N_t = \{7\,,8\,,9\}$ III $N_s = \{1\,,2\,,3\,,5\,,6\}$

F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il valore del flusso massimo è:

I 7 II 9 III 10

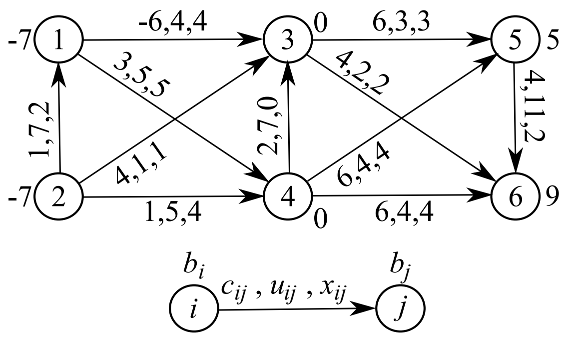
G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio $(N_s\,,N_t)$ individuato dall'algoritmo è:

I $N_t = \{7\,,8\,,9\}$ II $N_t = \{7\,,8\}$ III $N_s = \{2\,,3\,,5\,,6\}$

H Quanti modi diversi ci sono di aumentare di un'unità la capacità di un singolo arco per fare un modo che il valore del flusso massimo aumenti anch'esso di un'unità? E come cambia la risposta per due unità? Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Il taglio di capacità minima individuato dall'algoritmo, con $N_t = \{7\,,8\}$, è unico come è facile verificare considerando tutti gli altri archi saturi. Gli archi diretti di tale taglio sono 4: $(4\,,7)$, $(4\,,8)$, $(5\,,8)$ and $(6\,,8)$. Ciascuno di essi è quindi tale per cui aumentandone la capacità di un'unità si crea un cammino aumentante di capacità unitaria che permette di portare il valore del flusso a 10; un esempio di tali cammini è (nell'ordine) $2 \to 4 \to 7 \to 8$, $2 \to 4 \to 8$, $2 \to 4 \to 5 \to 8$, $2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$.
Come è facile verificare, in ciascuno dei 4 casi sopra descritti la capacità del cammino diviene 2 se la capacotà dell'arco viene aumentata di due unità, quindi anche in questo caso la risposta è quattro.

4) Per il problema dello flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[\,7\,,\,7\,,\,0\,,\,0\,,\,-5\,,\,-9\,]$ II $[\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,-1\,]$ III $[\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 83 II 141 III 139

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 4 \to 3 \to 2$ II $3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 3$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $6 \to 5 \to 3 \to 2 \to 4$ II $6 \to 4 \to 2 \to 1 \to 3$ III nessuno dei due

E Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

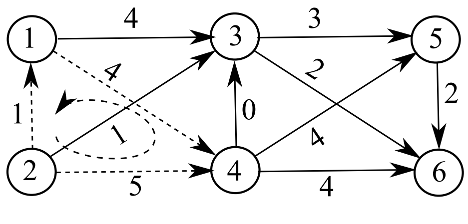
I $2 \to 3 \to 4 \to 2$ II $1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4 \to 2 \to 1$ III $3 \to 1 \to 4 \to 3$

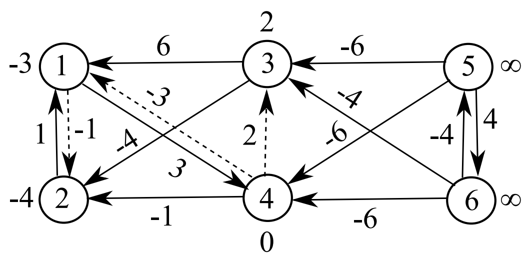
F Si dica se lo pseudoflusso è oppure no minimale, ed altrimenti si indichi come costruirne uno per il corrente vettore di sbilanciamenti. Una volta individuato lo pseudoflusso minimale si esegua a partire da esso l'algoritmo dei cammini minimi successivi, mostrando le iterazioni mostrate e discutendo la soluzione ottenuta. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso non è minimale perchè esiste il ciclo $C = 2 \to 4 \to 1 \to 2$ che è aumentante, in quanto ha capacità

$$\theta(\,C\,,\,x\,) = \min\{\,u_{24} - x_{24}\,,\,x_{14}\,,\,x_{21}\,\} = \min\{\,5-4\,,\,5\,,\,2\,\} = 1 > 0$$

ed ha costo $C(\,C\,) = c_{24} - c_{14} - c_{21} = 1 - 3 - 1 = -3 < 0$. Inviando un'unità di flusso lungo C si ottiene il lo pseudoflusso $x' = x \oplus 1C$ illustrato in figura qui sotto a sinistra, che è minimale. Per dimostrarlo basta costruire il grafo residuo rispetto a x' e calcolarne l'albero dei cammini minimi, che sono mostrati accanto a destra (gli archi tratteggiati sono quelli dell'albero) insieme al vettore di etichette che rispetta le condizioni di Bellman. Questo dimostra che sul grafo residuo non esistono cicli orientati di costo negativo, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto allo pseudoflusso x'.





L'albero dei cammini minimi calcolato è quello che ha come radici i nodi con sbilanciamento positivo, in questo caso il solo nodo 4 (che infatti ha etichetta 0). Da tale albero bisognerebbe selezionare un cammino tra un nodo con sbilanciamento positivo (4) ad uno con sbilanciamento negativo (il solo 6), ma tale cammino non esiste: infatti 6 ha etichetta ∞, il che significa che—come è immediato verificare—non è raggiungibile da 4 sul grafo residuo. Pertanto non esistono cammini aumentanti rispetto ad x' in grado di diminuire lo sbilanciamento complessivo di x', e l'algoritmo dei cammini minimi successivi termina immediatamente dichiarando che l'istanza data del problema di flusso di costo minimo è inammissibile. Questo è facile da verificare considerando il taglio $(\,N'\,,\,N''\,) = (\,\{\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,\}\,,\,\{\,5\,,\,6\,\}\,)$ individuato dall'albero (in N' i nodi raggiungibili, in N'' gli altri): il taglio è saturo (tutti gli archi diretti sono saturi, tutti quelli inversi sono vuoti) ed ha capacità 13. Ma il deficit totale dei nodi in N' è $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = -7 - 7 + 0 + 0 = -14$, ed ovviamente il deficit totale dei nodi in N'' è il suo opposto ($b_5 + b_6 = 5 + 9 = 14$). Pertanto, sarebbe necessario far transitare 14 unità di flusso attraverso il taglio (in direzione $N' \to N''$) per essere in grado di soddisfare tutti i vincoli di conservazione di flusso dei nodi in N' (ed in N''), ma questo non è possibile perché la capacità del taglio è solamente 13; infatti, dopo aver saturato il taglio rimane ancora uno sbilanciamento complessivo pari ad 1.