1) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto ed il corrispondente problema duale (D).

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & -x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & + & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta ?

I La soluzione $x = [\,1\,,\,1\,]$ è primale non degenere

II La soluzione $x = [\,1\,,\,1\,]$ è ottima per il primale

III Non esiste nessuna soluzione duale degenere complementare a $x = [\,1\,,\,1\,]$

B Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = [\,1\,,\,1\,]$ è ottima per (P)?

I $\alpha \geq \beta \geq 0$ II $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ III $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

C Se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti direzioni è di crescita per (P)?

I $\xi = [\,1\,,\,-1\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precedenti

D Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I l'insieme è vuoto II $\{\,[\,t\,,\,1-t\,,\,t\,,\,0\,,\,0\,],\ t \geq 0\,\}$ III nessuna delle precedenti

E Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I la soluzione duale è degenere II la soluzione primale è non degenere III nessuna delle precedenti

F Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme delle direzioni ammissibili e di crescita ?

I $\emptyset$ II $\{\,[\,1\,,\,-1\,]\,\}$ III $\{\,[\,-1\,,\,1\,]\,\}$

G È possibile, cambiando un solo lato destro b_i dei vincoli $Ax \leq b$ di (P), rendere la soluzione primale ottima non degenere? Giustificare la risposta.

Risposta: Nella soluzione ottima $\bar{x} = [\,1\,,\,1\,]$ di (P) sono attivi quattro vincoli: $I(\,\bar{x}\,) = \{\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,\}$. Non è possibile rendere la soluzione non degenere cambiando un solo b_i, dal momento che in $\bar{x}$ sarebbero comunque attivi almeno 3 vincoli.

2) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, al problema di PL dato qui accanto.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & -4x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

A Per $B = \{\, 2\,,\, 5 \,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile — II è una base primale degenere — III entrambe le cose

B Per $B = \{\, 2\,,\, 3 \,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile — II è una base primale non ammissibile — III non è una base

C Per $B = \{\, 1\,,\, 4 \,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile — II è una base primale non ammissibile — III non è una base

D Se la base corrente è $B = \{\, 3\,,\, 4 \,\}$, l'indice uscente determinato dall'algoritmo è

I $h = 3$ — II $h = 4$ — III nessuno (l'algoritmo termina)

E Se la base corrente è $B = \{\, 3\,,\, 4 \,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 3$ è

I ammissibile — II di crescita — III entrambe le cose

F Se la base corrente è $B = \{\, 4\,,\, 5 \,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 5$ è

I ammissibile — II di crescita — III nessuna delle due cose

G Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\, 2\,,\, 5 \,\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte. Infine si discuta come cambierebbero le conclusioni se il vettore dei costi c fosse $[\, -2\,,\, 2 \,]$ invece che $[\, -4\,,\, 2 \,]$. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{\, 2\,,\, 5 \,\}$ si ha

$$
A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\bar{y}_B = [\, -4\,,\, 2 \,] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, 4\,,\, -2 \,] \quad , \quad \bar{y} = [\, \bar{y}_B\,,\, \bar{y}_N \,] = [\, 0\,,\, 4\,,\, 0\,,\, 0\,,\, -2 \,]
$$

$$
h = \min\{\, i \in B \,:\, \bar{y}_i < 0 \,\} = 5 \;\; , \;\; B(h) = 2 \;\; , \;\; \xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

$$
A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leq 0
$$

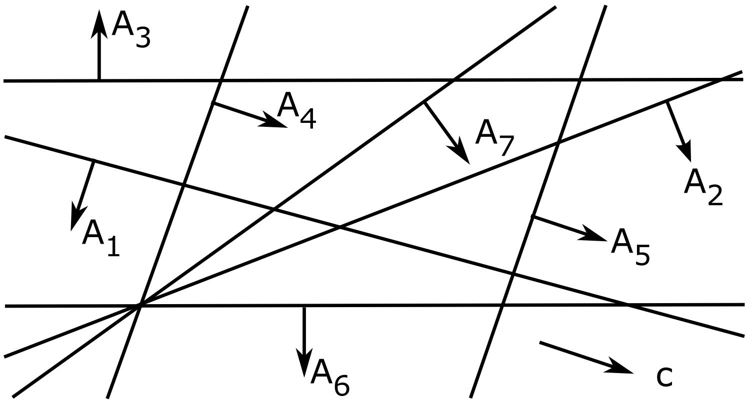
Poiché $A_N \xi \leq 0$, ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza il problema duale è vuoto.

Se il vettore dei costi c fosse $[\, -2\,,\, 2 \,]$ invece che $[\, -4\,,\, 2 \,]$ si avrebbe $c\xi = 0$, e pertanto la direzione ξ determinata all'ultima iterazione non sarebbe di crescita (e neppure di decrescita). In effetti, poiché

$$
\bar{y}_B = c A_B^{-1} = [\, -2\,,\, 2 \,] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, 2\,,\, 0 \,]
$$

in quel caso l'ultima soluzione primale determinata sarebbe ottima per il primale, in quanto la soluzione di base complementare $\bar{y} = [\, \bar{y}_B\,,\, \bar{y}_N \,] = [\, 0\,,\, 2\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0 \,]$ sarebbe ammissibile, e quindi ottima, per il duale.

3) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c, A_4 ed A_5 sono collineari tra loro, ed anche A_3 ed A_6 lo sono.



A Per $B = \{\, 3\,,\, 4\,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III entrambe le cose

B Per $B = \{\, 6\,,\, 7\,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III nessuna delle due cose

C Per $B = \{\, 2\,,\, 5\,\}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile II è una base duale degenere III entrambe le cose

D Per $B = \{\, 2\,,\, 5\,\}$, l'indice entrante è

I $k = 1$ II $k = 4$ III $k = 7$

E Per $B = \{\, 4\,,\, 6\,\}$, l'indice entrante è

I $k = 1$ II $k = 2$ III $k = 7$

F Per $B = \{\, 4\,,\, 6\,\}$, dato l'indice entrante stabilito alla domanda precedente, l'indice uscente è

I $h = 4$ II $h = 6$ III nessuno (l'algoritmo termina)

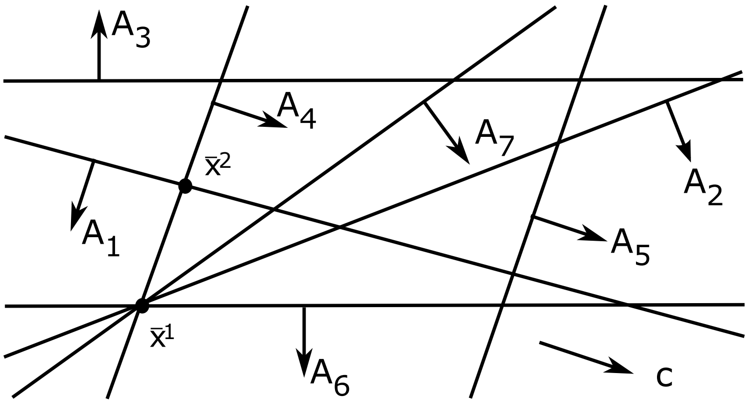
G Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\, 2\,,\, 4\,\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte. Al termine, nel caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primale e duale ottenute. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Alla prima iterazione, $B = \{\, 2\,,\, 4\,\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^1$, mostrata in figura qui sotto, viola il solo vincolo 1, pertanto $k = 1$. Poiché $A_1 \in cono(\, A_2\,,\, -A_4\,)$, come mostrato in (i), si ha $\eta_2 > 0$ ed $\eta_4 < 0$; pertanto deve necessariamente essere $h = 2$.

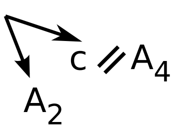
Alla seconda iterazione, quindi, $B = \{\, 1\,,\, 4\,\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ non viola alcun vincolo, come mostra la figura qui sotto, quindi l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale.

Per discutere l'unicità di $\bar{x}^2$ occorrere esaminare la degenerazione della soluzione duale di base; si ha che $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto c è collineare con A_4 (si veda (ii)), quindi la base è duale degenere. Pertanto $\bar{x}^2$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima. È infatti immediato verificare che questo è il caso: tutto il segmento di estremi $\bar{x}^1$ ed il vertice corrispondente alla base $\{\, 3\,,\, 4\,\}$ è ammissibile ed è formato da soluzioni aventi lo stesso valore di funzione obiettivo di $\bar{x}^2$.

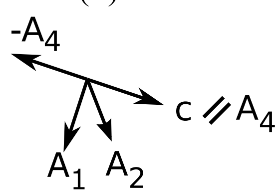
Per quanto riguarda l'unicità della soluzione duale di base determinata, poiché la soluzione primale di base $\bar{x}^2$ è non degenere ($B = I(\, \bar{x}^2\,)$), essa è sicuramente l'unica soluzione ottima.

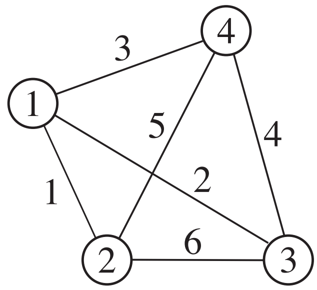


(i)



(ii)





4) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal nodo 1 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell'1-albero (se ve n'è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l'albero delle decisioni è visitato in ampiezza. Si risponda alle seguenti domande:

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I Il lato $\{1, 4\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano individuato dall'euristica

II L'1-albero di costo minimo calcolato alla radice è un ciclo Hamiltoniano

III L'1-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{14} = 0$ è un ciclo Hamiltoniano

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 10$, $\bar{z} = 10$ II $\underline{z} = 10$, $\bar{z} = 12$ III $\underline{z} = 12$, $\bar{z} = 12$

C Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 3: x_{12}, x_{13}, x_{14} II 3: x_{12}, x_{13}, x_{34} III 0

D Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità, 2 per la valutazione superiore

II 3 per la valutazione superiore

III 2 per la valutazione superiore, 1 per ottimalità

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

I $z = 10$, $\bar{z} = 10$ II $z = 10$, $\bar{z} = 12$ III $z = 12$, $\bar{z} = 12$

F In quanti modi è possibile aumentare il costo di un solo lato in modo tale che l'algoritmo termini alla radice (l'1-albero determinato sia un ciclo Hamiltoniano)? Giustificare la risposta.

Risposta: Nell'1-albero il nodo 1 ha grado 3, occorre quindi fare in modo che uno dei tre lati selezionati ($\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$) non faccia più parte dell'1-albero. Questo è possibile aumentando il costo di tali lati ed un valore > 5, ossia il costo del lato $\{2, 4\}$ che è il primo a non far parte dell'1-albero e quindi quello che viene inserito al posto di quello il cui costo viene aumentato. Quando $\{2, 4\}$ viene inserito, il grado del nodo 4 nell'1-albero diviene tre a meno che non venga eliminato il lato $\{1, 4\}$. Pertanto c'è un modo solo: aumentare il costo di $\{1, 4\}$ ad un valore $c_{14} > 5$.