1) La *polity* (Po), l'espansione della razza umana nello spazio, ha appena incontrato la prima razza aliena intelligente; sfortunatamente si tratta dei Prador (Pr), granchi giganti altamente aggressivi che da subito non hanno avuto altro pensiero che rendere schiavi, o cibo, tutti gli umani. Sulle rive del Lago di Ginevra, Earth Central (EC), il "primus inter pares" delle AI che governano la Po, sta pianificando la prima, cruciale fase della guerra contro i Pr. La Po è in netto svantaggio militare, in quanto per i viaggi interstellari si è adagiata sulla tecnologia dei *runcible* (portali); pertanto non ha una flotta paragonabile a quella dei Pr, che invece—essendo individualisti, ferocemente competitivi e paranoici—viaggiano ciascuno solamente col proprio *dreadnought* (Dn) pesantemente armato e corazzato, il cui equipaggio è formato dai propri figli tenuti sotto controllo dal terrore e dai feromoni (finché uno di loro non ci si sottrae, uccidendo il padre e prendendone il posto). Per questo però i Pr non hanno sviluppato le AI, delle quali temono (giustamente) di perdere il controllo. In quest'ora disperata EC decide quindi di sfruttare al massimo il principale vantaggio strategico della Po: le AI stesse, e la loro capacità di risolvere efficientemente problemi $\mathcal{NP}$-ardui. I Pr stanno assalendo un insieme N di Sistemi Strategici (SS) della Po; ciascun $i \in N$ ha un valore strategico v_i ed una popolazione p_i. EC ha determinato che se la Po riuscirà non perdere almeno il 63% del valore strategico totale, la superiore ricerca tecnologica delle AI riuscirà ad equilibrare prima, e rovesciare poi, le sorti del conflitto. EC ha stimato la potenza di fuoco f_i che i Pr hanno dispiegato nel SS $i \in N$. Per la difesa, la Po dispone di due tipi di risorse: i suoi Dn, quasi equivalenti a quelli Pr (tranne per le superiori corazze di questi), e gli sciami di *droni* (Dr), AI autonome montate su chassis da combattimento delle più diverse forme in grado di seminare il panico nelle file dei Pr con azioni di guerriglia spietate quanto quelle dei nemici. Una volta assegnato ad un SS, un Dn dispiegherà tutta la sua potenza di fuoco Δ in quell'unico sistema. Uno sciame di Dr assegnato al SS i può invece suddividere arbitrariamente la sua potenza di fuoco $\delta \ll \Delta$ tra tutti i SS nell'insieme $S(i) \subset N$ (con $i \in S(i)$) di quelli vicini ad i. EC ha stabilito che la Po riuscirà a difendere qualsiasi SS in cui la potenza di fuoco totale dispiegata sia almeno pari al 46% di quella Pr. Se però la potenza non sarà almeno pari al 17% di quella Pr non si riuscirà ad evacuare la popolazione civile del SS, che sarà quindi soggetta alle inenarrabili atrocità dei Pr. Aiutate EC ad evitare all'umanità un orribile destino formulando come *PLI* il problema di decidere quante delle D^n Dn e dei D^r sciami di Dr disponibili assegnare a ciascun SS in modo garantire la tenuta di una quantità sufficiente di SS minimizzando le perdite civili.

Per formulare il problema introduciamo le seguenti famiglie di variabili:

- $n_i \geq 0$, che indicano il numero di Dn assegnati al SS $i \in N$;
- $r_i \geq 0$, che indicano il numero di sciami di Dr assegnati al SS $i \in N$;
- $r_{ij} \geq 0$, per ciascun $i \in N$ e $j \in S(i)$, che indicano la frazione complessiva della potenza di fuoco che i Dr in i dedicano alla difesa di j (siccome $i \in S(i)$, r_{ii} rappresenta quanto i Dr assegnati al SS i contribuiscono alla difesa dello stesso).

Per convenienza notazionale definiamo per ogni $i \in N$ l'insieme $V(i) = \{ j \in N \,:\, i \in S(j) \}$ dei SS da cui i Dr possono aiutare nella difesa di i; ovviamente $j \in V(i)$ implica che è definita la variabile r_{ji}. Parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto (si considerano già dati anche i vincoli di segno sopra indicati):

$$\min \quad \dots \tag{1}$$
$$\textstyle\sum_{i \in N} n_i = D^n \tag{2}$$
$$\textstyle\sum_{i \in N} r_i = D^r \tag{3}$$
$$\textstyle\sum_{j \in S(i)} r_{ij} = r_i \qquad i \in N \tag{4}$$

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli necessari a completare la formulazione.

A $\quad y_i \in \{0, 1\}$, $i \in N$ — aggiungere

B $\quad a_i \in \{0, 1\}$, $i \in N$ — non aggiungere

C $\quad z_i \in \{0, 1\}$, $i \in N$ — aggiungere

D $\quad \sum_{i \in N} n_i + r_i = D^n + D^r$ — non aggiungere

E $\quad (0.46 f_i) y_i \leq \Delta n_i + \delta \sum_{j \in V(i)} r_{ji}$, $i \in N$ — aggiungere

F $\quad 0.46 f_i \leq \Delta n_i$, $0.46 f_i \leq \delta \sum_{j \in V(i)} r_{ji}$, $i \in N$ — non aggiungere

G $\quad (0.46 f_i)(1 - a_i) \geq \Delta n_i + \delta \sum_{j \in V(i)} r_{ji}$, $i \in N$ — non aggiungere

H $\quad \sum_{i \in N} v_i \geq 0.63$ — non aggiungere

$\boxed{\text{I}}$ $\sum_{i \in N} v_i y_i \leq 0.63 \sum_{i \in N} v_i$ non aggiungere

$\boxed{\text{J}}$ $\sum_{i \in N} v_i (y_i - 0.63) \geq 0$ aggiungere

$\boxed{\text{K}}$ $0.17 f_i \leq (\Delta n_i + \delta \sum_{j \in V(i)} r_{ji}) z_i \;\;,\;\; i \in N$ non aggiungere

$\boxed{\text{L}}$ $(0.17 f_i)(1 - z_i) \leq \Delta n_i + \delta \sum_{j \in V(i)} r_{ji} \;\;,\;\; i \in N$ aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $a_i z_i \leq (\Delta n_i + \delta \sum_{j \in V(i)} r_{ji}) / f_i \;\;,\;\; i \in N$ non aggiungere

$\boxed{\text{N}}$ $\sum_{i \in N} p_i$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ $\sum_{i \in N} p_i z_i$ (funzione obiettivo) aggiungere

$\boxed{\text{P}}$ $\sum_{i \in N} p_i z_i + v_i y_i$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) Il modello indicato è costruito ad-hoc da EC per farlo trapelare alle AI che sa "avere un debole" per gli umani, in quanto ha come funzione obiettivo quella di salvaguardare più vite possibile. In realtà EC, come quasi tutte le AI, ha ben poco riguardo per la vita organica, che considera come mera risorsa per la Po al pari dei Dr e Dn, ed in effetti meno rilevanti di questi ai fini strategici. EC decide quindi di attuare un piano di battaglia basato su un diverso modello in cui si vuole semplicemente assicurare la salvaguardia dell'insieme di SS minimo necessario ad avere la vittoria finale (senza alcuna considerazione delle sofferenze che questo porterà) minimizzano il numero totale di Dn e Dr utilizzati a questo scopo, in modo da tenerne quanti più possibile di riserva per la difesa ad oltranza della Terra e della sua personale preziosissima esistenza qualora le cose dovessero andare male. Si indichi come modificare il modello dato per questo.

risposta alla domanda b: Possono essere eliminate le variabili z_i in $\boxed{\text{C}}$, che indicano quali sistemi sono evacuati, insieme ai vincoli $\boxed{\text{L}}$ che sostanzialmente le definiscono ed alla funzione obiettivo $\boxed{\text{N}}$. La funzione obiettivo diviene semplicemente

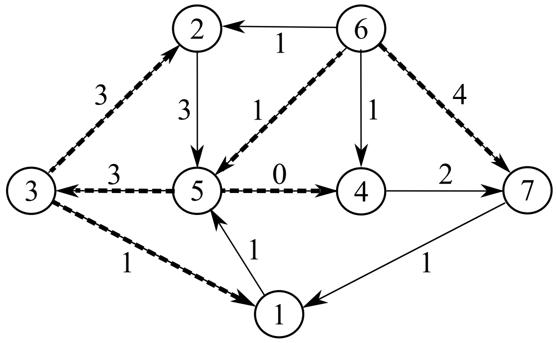
$$\min \;\; \sum_{i \in N} n_i + r_i \tag{5}$$

mentre i primi due blocchi di vincoli dati divengono

$$\sum_{i \in N} n_i \leq D^n \tag{6}$$

$$\sum_{i \in N} r_i \leq D^r \tag{7}$$

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 6 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(6,5)$ con l'arco $(6,4)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [5,7,4,1,1,0,4]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 15

B Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(6,2),(7,1)\}$ II $\{(6,2),(4,7)\}$ III $\{(3,6),(4,7),(7,1)\}$

C Quale delle seguenti sostituzioni produce un albero dei cammini minimi?

I $(3,2)$, $(6,7)$, $(3,1)$ con $(6,2)$, $(4,7)$, $(7,1)$

II $(3,2)$, $(6,7)$ con $(6,2)$, $(4,7)$

III $(3,2)$, $(6,7)$, $(5,4)$, con $(6,2)$, $(4,7)$, $(6,4)$

D Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

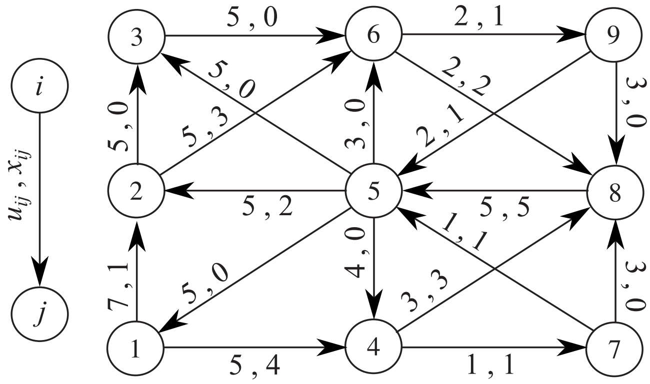
I 12 II 14 III 15

E Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia l'unico albero dei cammini minimi. È possibile modificare il costo di due soli archi dell'albero, mantenendo i costi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi? Giustificare la risposta.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte come disuguaglianze strette, basta modificare tra gli archi fuori dall'albero $c_{62} > 7$, $c_{47} > 3$, $c_{64} > 1$ e $c_{71} > 1$.

Non è possibile rendere ottimo l'albero dato, modificando il costo di due soli archi dell'albero e mantenendo i costi positivi: occorrerebbe necessariamente porre $c_{67} \leq 3$ in modo tale l'arco $(4,7)$ rispetti la condizione di Bellman. Rimarrebbe quindi da modificare un solo arco affinché $(6,2)$ rispetti le condizioni di Bellman, e questo non non è possibile mantenendo i costi degli archi non negativi. Infatti il costo del cammino $6 \to 5 \to 3 \to 2$ nell'albero è 7, ma l'etichetta di 2 dovrebbe diventare ≤ 1: pertanto occorrerebbe porre $c_{32} = -3$, oppure $c_{53} = -3$, oppure $c_{65} = -5$.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 5 II non ammissibile III ammissibile di valore 7

B Ponendo $x_{52} = 0$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 3 II non ammissibile III ammissibile di valore 5

C Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ II $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 8$ III $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$

D Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 10:

I $N_s = \{1\}$ II $N_s = \{2, 3\}$ III nessuno dei due

E Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 10:

I $N_t = \{5\}$ II $N_t = \{5, 7, 8, 9\}$ III entrambi

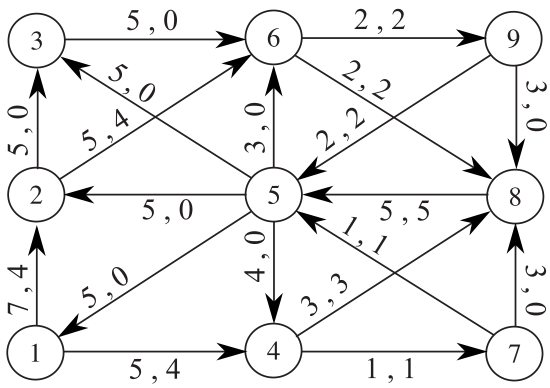
F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:

I 1 II 2 III 3

G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:

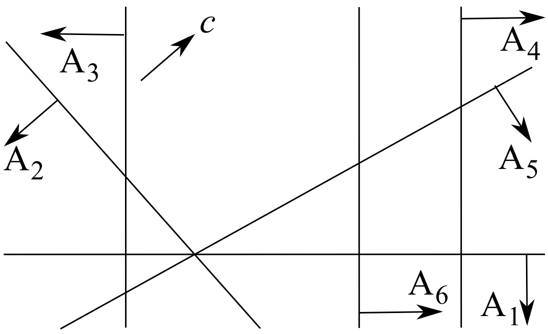
I $N_t = \{5\}$ II $N_t = \{5, 7, 8, 9\}$ III $N_t = \{7, 8, 9\}$

H Quanti modi diversi ci sono di invertire il verso di un solo arco (ossia trasformarlo da (i, j) a (j, i)) in modo da aumentare della massima quantità possibile il flusso massimo individuato nei punti precedenti?



Risposta: Il flusso ottimo è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso dato, che è ammissibile di valore 5, inviando due unità di flusso lungo il cammino $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ ed un'unità di flusso lungo il cammino $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 5$, ottenendo un flusso di valore $v = 8$. Ciò richiede due iterazioni, ma l'algoritmo deve eseguire anche una terza visita del grafo residuo, che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio (N_s, N_t), con $N_t = \{5, 7, 8, 9\}$, di capacità $u(N_s, N_t) = 8$, che quindi è il taglio di capacità minima. Questo non è unico: infatti, anche $N_t = \{5\}$ ha capacità 8 ed è un taglio saturo. Affinchè invertire un arco permetta di aumentare il flusso questo deve appartenere a tutti i tagli ottimi ed essere inverso nel taglio, dimodoché una volta invertito diventi diretto. Ci sono tre archi che hanno questa proprietà: $(5, 1)$, $(5, 2)$ ed $(5, 3)$. Invertendo $(5, 1)$ in $(1, 5)$ si possono inviare 5 unità di flusso lungo il cammino $1 \rightarrow 5$, ottenendo un flusso di valore $v = 13$ pari alla capacità di entrambi i tagli sopra menzionati. Invertendo $(5, 2)$ invece si possono inviare solamente tre unità di flusso extra lungo il cammino $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$; fatto questo il taglio con $N_s = \{1, 4\}$, che ha capacità 11, dimostra che il flusso non può essere ulteriormente aumentato. Un ragionamento analogo vale per invertire $(5, 3)$ in $(3, 5)$, inviando tre unità di flusso extra lungo il cammino $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. Pertanto c'è un solo modo che permette di aumentare il valore della massima quantità (5 unità, da $v = 8$ a $v = 13$).

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di *PL* rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che A_3, A_4 ed A_6 sono collineari (non tutti con lo stesso verso), e separatamente A_2 e c sono collineari (con verso opposto).



A Per $B = \{ 1 , 2 \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III entrambe le cose sono vere

B Per $B = \{ 3 , 6 \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III non è una base

C Per $B = \{ 2 , 5 \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile II è una base duale degenere III nessuna delle due cose è vera

D Se la base corrente è $B = \{ 2 , 3 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 3$ è

I ammissibile II di crescita III entrambe le cose sono vere

E Se la base corrente è $B = \{ 1 , 2 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

I ammissibile II di crescita III nessuna delle due cose è vera

F Se la base corrente è $B = \{ 1 , 2 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 2$ è

I ammissibile II di crescita III entrambe le cose

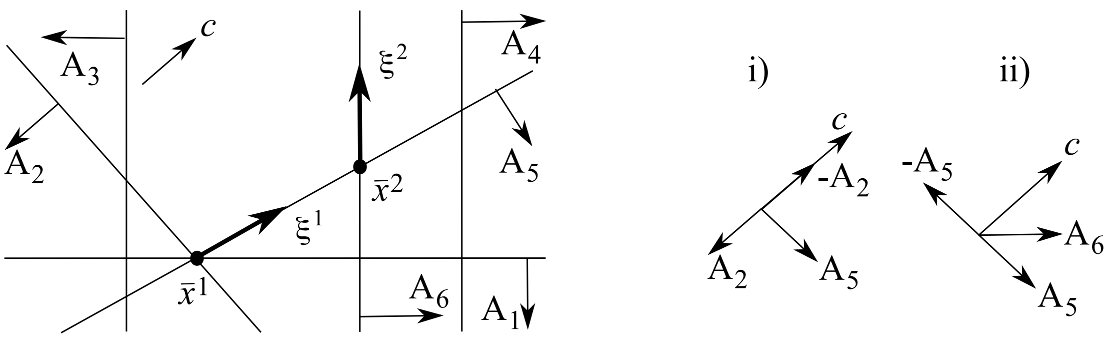
G Se la base corrente è $B = \{ 1 , 5 \}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è

I $h = 1$ II $h = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{ 2 , 5 \}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Risposta: La soluzione di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 2 e 5). La base è primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti c appartiene a *cono*$(\{ -A_2 , A_5 \})$, ed in effetti semplicemente *cono*$(\{ -A_2 \})$, essendo collineare con A_2 e di verso opposto, come mostrato in i), e quindi $\bar{y}_2 < 0$ e $\bar{y}_5 = 0$. Pertanto $h = 2$ e si determina la direzione ξ^1 mostrata in figura qui sotto. La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) ed ammissibile; inoltre ha prodotto scalare positivo (forma un angolo minore di 90 gradi) con A_4 ed A_6, ma ovviamente il massimo passo lungo ξ^1 si ha per A_6, che viene incontrato prima di A_4, e quindi $k = 6$.

Alla seconda iterazione la base è quindi $B = \{ 5 , 6 \}$. La corrispondente soluzione di base $\bar{x}^2$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 5 e 6. La base non è duale ammissibile: infatti c appartiene a *cono*$(\{ -A_5 , A_6 \})$, come mostrato in ii), e quindi $\bar{y}_5 < 0$ e $\bar{y}_6 > 0$. Pertanto $h = 5$ e si determina la direzione ξ^2 mostrata in figura qui sotto. La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) ed ammissibile; inoltre ha prodotto scalare non negativo con tutti i gradienti dei vincoli (in particolare ha prodotto nullo con A_3, A_4 ed A_6). Pertanto è una direzione del cono di recessione del poliedro ed è anche di crescita, il che dimostra che il problema primale è superiormente illimitato ed il problema duale è vuoto.



5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

$$\begin{array}{lcccccccccc} \max & x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & & \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 11 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{ x_2 , x_3 , x_4 , x_1 \}$ II $\{ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \}$ III $\{ x_1 , x_4 , x_3 , x_2 \}$

B Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $[0, 1, 1, 1]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere se il lato destro del vincolo viene posto a 9

III La soluzione ottima del rilassamento continuo cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 10

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 12$, $\bar{z} = 11$ II $\underline{z} = 11$, $\bar{z} = 34/3$ III $\underline{z} = 12$, $\bar{z} = 34/3$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_1, x_4, x_3 II x_1, x_4 III x_1

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $\underline{z} \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due nodi dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $\underline{z} = 11$, $\bar{z} = 34/3$ II $\underline{z} = 11$, $\bar{z} = 12$ III $\underline{z} = 11$, $\bar{z} = 11$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I $[0, 1, 1, 1]$ II $[0, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 0, 1]$ III $[0, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibiltà

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude almeno un nodo per la sola valutazione superiore ($\underline{z} \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H È possibile modificare il volume dello zaino ad un valore ≥ 9 in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla prima ramificazione (la radice e i suoi figli) e chiuda tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)? Giustificare la risposta.

Risposta: No, non è possibile. Affinché l'algoritmo termini direttamente alla prima ramificazione, dovrebbe ramificare sulla sola x_1 dato l'ordine non crescente dei rendimenti $\{ x_2 , x_3 , x_4 , x_1 \}$: occorre quindi che il volume dello zaino sia:

- < 13, altrimenti l'algoritmo terminerebbe alla radice, determinando la soluzione $[1, 1, 1, 1]$;
- ≥ 10, altrimenti la soluzione individuata sul ramo $x_1 = 0$ sarebbe frazionaria;
- ≤ 9, altrimenti la soluzione individuata sul ramo $x_1 = 1$ sarebbe frazionaria.

Le ultime due condizioni sono in contraddizione tra loro.