1) A seguito della recente fusione con una nota casa automobilistica, l'azienda OR ha deciso di riorganizzare la sua rete di distribuzione delle auto. Per questo, si è deciso di utilizzare un classico sistema a due livelli, nel quale le auto sono inviate a grandi Magazzini Centrali (MC), da questi a Magazzini Periferici (MP) più piccoli, ed infine da questi ai concessionari (CO) da servire, descritti dall'insieme C. È stato individuato un insieme P di siti dove può essere costruito un MC, al costo di f_h Euro per $h \in P$, ed un insieme Q di siti dove può essere costruito un MP, al costo di g_j Euro per $j \in Q$. Ogni CO deve essere servito da uno ed un solo MP, ed ogni MP effettivamente costruito deve essere rifornito da uno ed un solo MC. Il costo di servire un CO dipende sia dal MP al quale viene assegnato che dal MC che viene utilizzato per rifornire tale MP, ed è quindi indicato come c_{hji} per ogni $\{ i , j , h \} \in C \times Q \times P$. Si formuli come *PLI* il problema di decidere quali MC ed MP costruire, e come assegnare i CO ai MP e questi ultimi ai MC, minimizzando il costo totale dato dalla somma dei costi di costruzione dei magazzini e dei costi di servizio di tutti i CO.

Per formulare il problema introduciamo la seguente famiglia di variabili:

$$x_{hji} = \begin{cases} 1 & \text{se il CO } i \text{ è servito dal MP } j \text{ che è rifornito dal MC } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \{ i , j , h \} \in C \times Q \times P \ .$$

Parte della formulazione è riportata qua sotto:

$$\min \ \ldots \tag{1}$$
$$x_{hji} \in \{ 0 , 1 \} \qquad h \in P \ , \ j \in Q \ , \ i \in C \tag{2}$$

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli necessari a definire la formulazione.

A	$z_h \in \{ 0 , 1 \} \ , \ h \in P$	aggiungere
B	$y_{hj} \in \{ 0 , 1 \} \ , \ h \in P \ , \ j \in Q$	aggiungere
C	$a_{ij} \in \{ 0 , 1 \} \ , \ i \in C \ , \ j \in Q$	non aggiungere
D	$\sum_{j \in Q} x_{hji} = 1 \ , \ i \in C \ , \ h \in P$	non aggiungere
E	$\sum_{h \in P} \sum_{j \in Q} x_{hji} = 1 \ , \ i \in C$	aggiungere
F	$\sum_{h \in P} x_{hji} = 1 \ , \ i \in C \ , \ j \in Q$	non aggiungere
G	$\sum_{h \in P} y_{hj} \leq 1 \ , \ j \in Q$	aggiungere
H	$\sum_{h \in P} \sum_{j \in Q} y_{hj} \leq 1$	non aggiungere
I	$y_{hj} \geq x_{hji} \ , \ h \in P \ , \ j \in Q \ , \ i \in C$	aggiungere
J	$a_{ij} \geq x_{hji} \ , \ i \in C \ , \ h \in P \ , \ j \in Q$	non aggiungere
K	$\sum_{i \in C} a_{ij} \geq y_{hj} \ , \ h \in P \ , \ j \in Q$	non aggiungere
L	$y_{hj} \geq \sum_{i \in C} x_{hji} \ , \ h \in P \ , \ j \in Q$	non aggiungere
M	$z_h \geq \sum_{j \in Q} y_{hj} \ , \ h \in P$	non aggiungere
N	$z_h \leq y_{hj} \ , \ h \in P \ , \ j \in Q$	non aggiungere
O	$z_h \geq y_{hj} \ , \ h \in P \ , \ j \in Q$	aggiungere
P	$\sum_{h \in P} f_h z_h + \sum_{j \in Q} g_j \sum_{h \in P} y_{hj} + \sum_{h \in P} \sum_{j \in Q} \sum_{i \in C} c_{hji} x_{hji}$ (funzione obiettivo)	aggiungere
Q	$\sum_{h \in P} f_h z_h + \sum_{j \in Q} g_j \sum_{i \in C} a_{ij} + \sum_{h \in P} \sum_{j \in Q} \sum_{i \in C} c_{hji} x_{hji}$ (funzione obiettivo)	non aggiungere

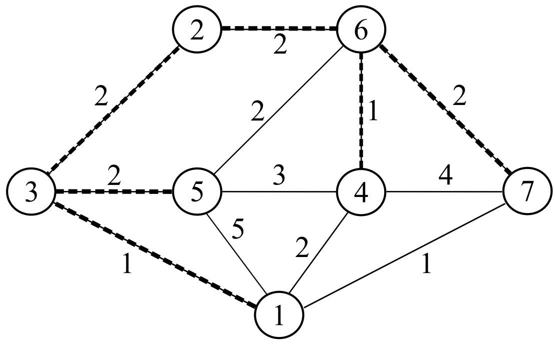
$\boxed{\text{R}}$ $\sum_{h\in P} f_h + \sum_{j\in Q} g_j \sum_{h\in P} y_{hj} + \sum_{h\in P}\sum_{j\in Q}\sum_{i\in C} c_{hji}x_{hji}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) Si indichi infine come modificare in modo semplice il modello qualora si decida che i C possono essere serviti o da un MP o direttamente da un MC; il costo di servire il C i direttamente dal MC h è c_{hi} per ogni $(h, i) \in P \times C$.

risposta alla domanda b: Per esprimere il caso in cui i C possono anche essere serviti direttamente da un MC è sufficiente aggiungere un "finto" MP, ad esempio di indice 0, già costruito (ossia, $g_0 = 0$), e porre $c_{h0i} = c_{hi}$, inserendo l'indice 0 in Q. Occorre inoltre introdurre il nuovo gruppo di vincoli

$$z_h \geq x_{h0i} \quad , \quad h \in P \quad , \quad i \in C \quad .$$

2) Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{1, 3\}$ con il lato $\{1, 7\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Sostituendo il lato $\{4, 6\}$ con il lato $\{1, 7\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I $\{2, 3\}$ e $\{6, 7\}$ II $\{2, 3\}$, $\{2, 6\}$ e $\{6, 7\}$ III $\{2, 3\}$ e $\{2, 6\}$

C Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1, 7\}$ e $\{1, 4\}$ II $\{1, 7\}$ III nessuno

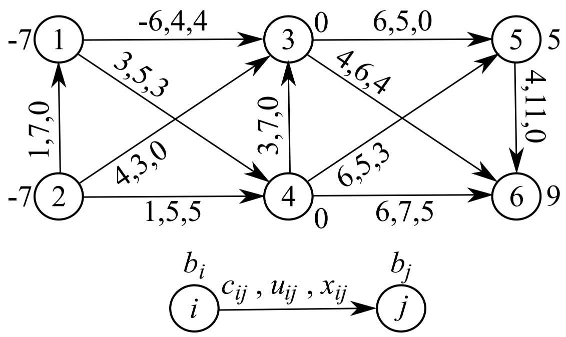
D Qual è il minor numero di sostituzioni di lati che bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo e quali sono?

I $2 : \{2, 6\}$ e $\{6, 7\}$ con $\{1, 4\}$ e $\{1, 7\}$ II $1 : \{1, 3\}$ con $\{1, 7\}$ III $1 : \{6, 7\}$ con $\{1, 7\}$

E Modificare il costo del minor numero possibile di lati dell'albero affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. Modificare il costo del minor numero possibile di lati fuori dal'albero affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta.

Risposta: Le condizioni $c_{23} \leq 1$, $c_{26} \leq 1$ e $c_{67} \leq 1$ garantiscono che qualsiasi lato $\{i, j\}$ dell'albero abbia costo minore di tutti gli altri lati del taglio che si viene a formare quando $\{i, j\}$ viene eliminato all'albero (condizione di ottimalità per tagli), il che implica che l'albero è una soluzione ottima del problema. La condizione $c_{17} \geq 2$ garantisce che qualsiasi lato $\{i, j\}$ dell'albero abbia costo maggiore di tutti gli altri lati del ciclo che si viene a formare quando $\{i, j\}$ viene aggiunto all'albero (condizione di ottimalità per cicli), il che implica che l'albero è una soluzione ottima del problema.

3) Per il problema dello flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[7, 7, 0, 0, -5, -9]$ II $[-7, -7, 0, 0, 5, 9]$ III $[0, 2, 0, 0, -2, 0]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 103 II 54 III 125

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 4 \to 3 \to 1$ II $4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $6 \to 3 \to 2 \to 1$ II $2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 6$ III nessuno dei due

E Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

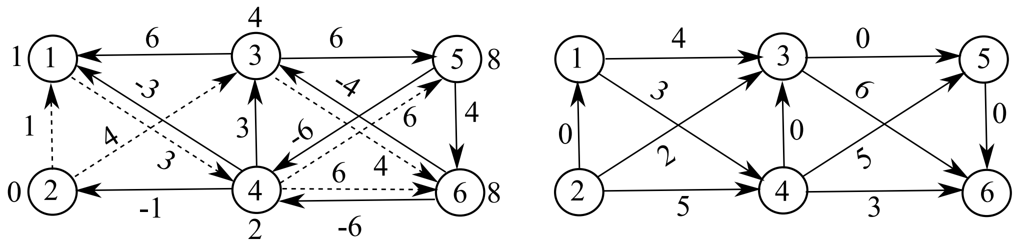
I $1 \to 4 \to 3 \to 1$ II $2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2$ III entrambi

F Quali dei seguenti cammini ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4$ II $2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 4$ III entrambi

G Si dica se lo pseudoflusso è oppure no minimale, ed altrimenti si indichi come costruirne uno per il corrente vettore di sbilanciamenti. Una volta individuato lo pseudoflusso minimale si esegua a partire da esso l'algoritmo dei cammini minimi successivi, mostrando le iterazioni mostrate e discutendo la soluzione ottenuta. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso è minimale. Per verificarlo basta costruire il grafo residuo rispetto allo pseudoflusso x e calcolare l'albero dei cammini minimi che ha come radici i nodi con sbilanciamento positivo, in questo caso il solo nodo 2. Tale costruzione è mostrata nella figura seguente, a sinistra: gli archi tratteggiati sono quelli dell'albero, e le etichette dei nodi rispettano le condizioni di Bellman. Questo dimostra che sul grafo residuo non esistono cicli orientati di costo negativo, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto allo pseudoflusso x.



Da tale albero bisogna selezionare un cammino tra un nodo con sbilanciamento positivo (il solo 2) ad uno con sbilanciamento negativo (il solo 5): questo è quindi necessariamente il cammino $2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 5$, che è (ovviamente) aumentante, in quanto ha capacità

$$\theta(C, x) = \min\{ u_{23} - x_{23}, u_{36} - x_{36}, x_{46}, u_{45} - x_{45} \} = \min\{ 3 - 0, 6 - 4, 5, 5 - 3 \} = 2 > 0 \ .$$

Su tale cammino si invia quindi una quantità di flusso pari a

$$\theta = \min\{ \theta(C, x), e_x(2), -e_x(5) \} = \min\{ 3, 2, 2 \} = 2$$

ottenendo lo pseudoflusso x' mostrato in figura a destra. Tale pseudoflusso è un flusso ammissibile: infatti inviare flusso lungo il cammino ha permesso di rendere nulli gli sbilanciamenti dei due nodi estremi, che erano gli unici con sbilanciamente non nullo, ottenendo così uno pseudoflusso x' con sbilanciamento complessivo $g(x') = 0$, ossia un flusso ammissibile. Dalla teoria sappiamo senza necessità di verificarlo che tale pseudoflusso è minimale, e pertanto abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema (un flusso di costo minimo).

4) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto ed il corrispondente problema duale (D).

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & \alpha x_1 & - & \beta x_2 & & \\ & -2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione $x = [\,1\,,\,1\,]$ è primale non degenere

II La soluzione $x = [\,0\,,\,0\,]$ è ottima per il primale

III Esiste almeno una soluzione ammissibile primale degenere

B Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = [\,1\,,\,1\,]$ è ottima per (P)?

I $-\beta \leq \alpha \leq \beta$ II $\alpha \geq |\beta|$ III $\alpha \geq \beta$

C Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti direzioni è di crescita per (P)?

I $\xi = [\,-1\,,\,-1\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precedenti

D Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{\,[\,0\,,\,1\,,\,t\,,\,0\,,\,0\,],\ t \geq 0\,\}$ I l'insieme è vuoto III nessuna delle precedenti

E Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I il duale ha soluzione ottima degenere II il primale ha soluzione ottima degenere III nessuna delle precedenti

F Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme delle direzioni ammissibili per $x = [\,1\,,\,1\,]$ e di crescita ?

I $\emptyset$ II $\{\,[\,1\,,\,-1\,]\,\}$ III $\{\,[\,-1\,,\,1\,]\,\}$

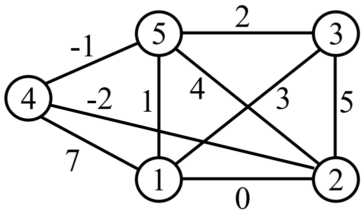
G Individuare tutte le direzioni ammissibili per $x = [\,0\,,\,2\,]$ che siano anche di crescita quando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Giustificare la scelta effettuata.

Risposta: L'insieme delle direzioni cercate corrisponde al cono $\{\,\xi \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq \xi_1 \leq -\xi_2\ ,\ \xi_2 < 0\,\}$: infatti ξ è

- una direzione di crescita se e solo se $c\xi > 0$, quindi se e solo se $[\,0\,,\,-1\,]\,[\,\xi_1\,,\,\xi_2\,] > 0$, cioè se e solo se $\xi_2 < 0$;
- una direzione ammissibile per x se e solo se $A_{I(x)}\xi \leq 0$ dove $I(\,x\,)$ è l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x: per $x = [\,0\,,\,2\,]$ si ha $I(\,x\,) = \{\,2\,,\,4\,\}$, dunque

$$A_{I(\,x\,)}\xi \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array}\right] \leq 0\ ,$$

ossia $0 \leq \xi_1 \leq -\xi_2$.



5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo (TSP) sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal vartice 4 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo (MS1T) come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando il vertice col più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visita breadth-first l'albero delle decisioni, ossia si implementa Q come una fila. Si risponda alle seguenti domande:

A Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 0$, $\bar{z} = \infty$ II $\underline{z} = 0$, $\bar{z} = 2$ III $\underline{z} = 2$, $\bar{z} = 2$

B Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I x_{15}, x_{35}, x_{45} II x_{14}, x_{24}, x_{45} III nessuna

C Quanti dei figli della radice vengono chiusi e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità, 2 per la valutazione superiore
II 2 per la valutazione superiore
III 1 per la valutazione superiore, 1 per ottimalità

D Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $z \geq z(P) \geq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

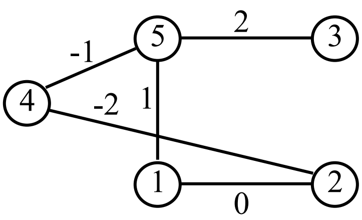
I $z = \infty$, $\bar{z} = 0$ II $z = 2$, $\bar{z} = 1$ III $z = 2$, $\bar{z} = 2$

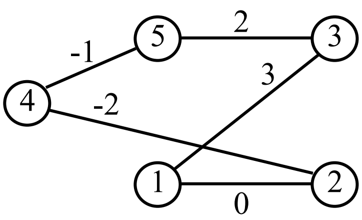
E Quanti dei nipoti (figli dei figli) della radice vengono chiusi e per quale motivo?

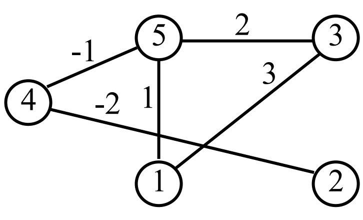
I 1 per inammissibilità, 2 per la valutazione superiore
II 2 per la valutazione superiore
III nessuno (non vengono creati)

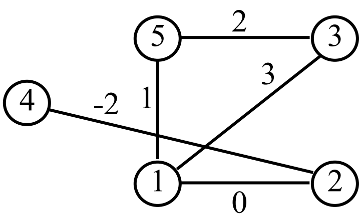
F In quanti modi è possibile eliminare un lato del grafo in modo tale che l'algoritmo termini alla radice (l'1-albero determinato sia un ciclo Hamiltoniano)? Giustificare la risposta.

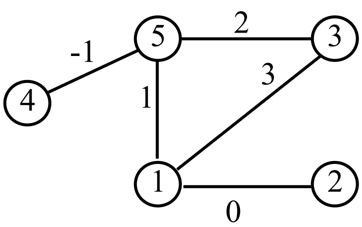
Risposta: L'1-albero determinato alla radice è mostrato sotto, in (a). Ovviamente, eliminare lati che non gli appartengono non lo cambia, e quindi non può fare in modo che divenga un ciclo Hamiltoniano: di conseguenza è possibile scegliere solamente uno dei lati dell'1-albero. È facile verificare che qualsiasi di essi si elimini, entrerà a far parte dell'1-albero il successivo lato nell'ordinamento, ossia $\{1, 3\}$ di costo pari a 3. L'unico caso in cui si ottiene un ciclo Hamiltoniamo è quello in cui si sia eliminato $\{1, 5\}$: infatti si ottiene il ciclo mostrato in (b) (lo stesso ottenuto visitando il primo figlio della radice, quello con appunto $x_{15} = 0$), mentre negli altri 4 casi si ottengono i grafi mostrati in (c) . . . (f), nessuno dei quali è un ciclo Hamiltoniano. Pertanto esiste un solo modo.

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)