1) L'Unione Europea ha fissato ambiziosi obiettivi sulla riduzione delle emissioni di CO_2, che richiedono la progressiva dismissione delle centrali elettriche basate su combustibili fossili. La diminuzione di capacità produttiva non potrà però essere interamente compensata dalle fonti rinnovabili (eolico, solare) nei tempi richiesti; pertanto l'agenzia per lo sviluppo energetico *Energie* deve aprire delle nuove centrali nucleari in una regione della Francia. Individua per questo un insieme S di siti candidati all'apertura di una centrale: ciascuna delle centrali $s \in S$, se costruita, avrà una potenza in uscita pari a m_s Megawatt/ora e dovrà inviare v_s camion al mese contenenti sue scorie nucleari, altamente radioattive, ad un deposito posto in un'ulteriore località d utilizzando la rete stradale, rappresentata da un grafo orientato $G = (N, A)$ in cui $S \subset N$ e $d \in N \setminus S$. L'agenzia censisce l'insieme C dei principali centri abitati della regione, e stima per ciascun arco $(i, j) \in A$ della rete stradale la distanza d_{ij} intercorrente tra di esso ed il più vicino centro abitato $h \in C$. L'agenzia stima che la probabilità di manifestazioni NIMBY (not in my backyard) in qualsiasi centro abitato sia inversamente proporzionale alla distanza minima a cui i camion passeranno da esso e direttamente proporzionale al numero di camion che passeranno per l'arco a distanza minima. Pertanto vuole mantenere il più bassa possibile ovunque la probabilità di proteste minimizzando il massimo del rapporto tra il numero di camion che passano su un arco e la distanza dello stesso dal più vicino centro abitato. Si vuole formulare in termini di *PLI* il problema di decidere dove aprire le p centrali elettriche e come inviare le scorie dalle centrali aperte al deposito d in modo da massimizzare la funzione obiettivo descritta con il vincolo che la capacità complessiva delle centrali aperte sia di almeno M Megawatt/ora.

Per descrivere il problema introduciamo per ciascun $s \in S$ la variabile binaria

$$y_s = \begin{cases} 1 & \text{se l'agenzia decide di aprire una centrale elettrica nel sito } s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad s \in S \ .$$

Notiamo che vale $0 < \underline{d} = \min\{ d_{ij} : (i, j) \in A \} \leq d_{ij} \leq \max\{ d_{ij} : (i, j) \in A \} = \bar{d}$, $0 < \underline{v} = \min\{ v_s : s \in S \} \leq \sum_{s \in S} v_s = V$, e quindi la funzione obiettivo è limitata inferiormente da $\underline{v} / \bar{d}$ e superiormente da $V / \underline{d}$. Introduciamo anche la variabile z che rappresenta la funzione obiettivo. Parte della formulazione è riportata qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ & y_s \in \{0, 1\} & s \in S \end{array}$$

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli necessari a completare la formulazione.

A $g_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

B $f_{ij} \geq 0 \qquad (i, j) \in A$ — aggiungere

C $\sum_{(j,i) \in A} g_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} g_{ij} = \begin{cases} -\sum_{s \in S} y_s & i = d \\ y_s & s \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N$ — non aggiungere

D $g_{ij} \leq f_{ij} \leq V g_{ij} \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

E $\underline{v} g_{ij} \leq f_{ij} \leq V g_{ij} \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

F $\sum_{(j,i) \in A} f_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = \begin{cases} -\sum_{s \in S} v_s y_s & i = d \\ v_s y_s & s \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N$ — aggiungere

G $\sum_{s \in S} m_s y_s = M$ — non aggiungere

H $\sum_{s \in S} m_s y_s \geq M$ — aggiungere

I $g_{ij} d_{ij} - V(1 - g_{ij}) / \underline{d} \leq z \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

J $f_{ij} d_{ij} - V(1 - g_{ij}) / \bar{d} \leq z \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

K $f_{ij} \leq z d_{ij} \qquad (i, j) \in A$ — aggiungere

L $f_{ij} g_{ij} / d_{ij} \leq z \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

M $f_{ij} d_{ij} - (V - f_{ij}) / \underline{d} \leq z \qquad (i, j) \in A$ — non aggiungere

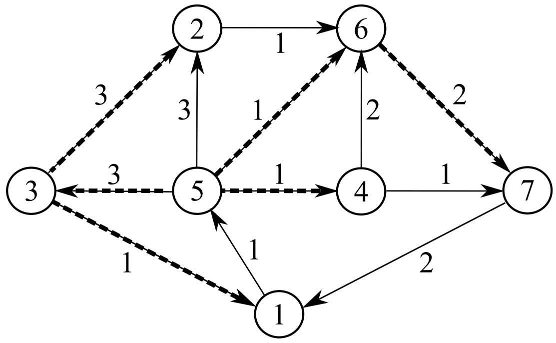
$\boxed{\text{N}}$ $z \leq \underline{v} \,/\, \bar{d}$ $\boxed{\text{non aggiungere}}$

domanda b) Si indichi infine come modificare il modello qualora si decida che la funzione obiettivo non debba essere il massimo del rapporto tra il numero di camion e la distanza (ossia la massima probabilità di di proteste) ma il numero stimato di protestanti dato dalla somma delle probabilità della protesta scatenata dal passaggio su ciascun arco $(\, i \,,\, j \,)$ moltiplicata per la popolazione (nota) p_{ij} della città $h \in C$ di distanza minima dall'arco e quindi preoccupata per tale passaggio.

La probabilià di scatenare proteste causata dal passaggio dei camion su $(\, i \,,\, j \,)$ è $f_{ij} \,/\, d_{ij}$; pertanto, la modifica al modello consiste semplicemente nella rimozione della variabile di soglia z e dei corrispondenti vincoli $\boxed{\text{K}}$, trasformando la funzione obiettivo in

$$\min \sum_{(\, i \,,\, j \,) \in A} p_{ij} f_{ij} \,/\, d_{ij}$$

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 5 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quale delle seguenti affermazioni sull'albero a destra è corretta?

I Sostituendo l'arco $(3, 5)$ con l'arco $(4, 7)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [4, 6, 3, 1, 0, 1, 3]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 11

B Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(5, 2), (4, 6), (4, 7)\}$ II $\{(5, 2)\}$ III $\{(5, 2), (4, 7)\}$

C Qual è il minor numero di archi da sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I 1 II 2 III 3

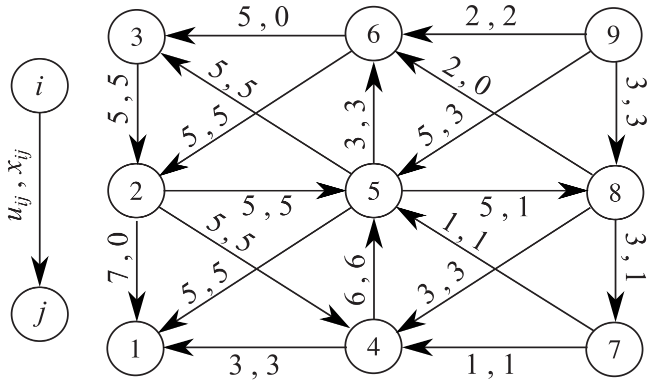
D Qual è il vettore di etichette di un albero dei cammini minimi?

I $d = [4, 6, 3, 1, 0, 1, 3]$ II $d = [4, 3, 3, 1, 0, 1, 2]$ III $d = [1, 3, 3, 1, 0, 1, 1]$

E Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte in modo stretto, basta modificare gli archi $c_{52} > 6$ e $c_{47} > 2$.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 9 al nodo 1 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 10 II non ammissibile III ammissibile di valore 8

B Ponendo $x_{75} = 0$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 10 II non ammissibile III ammissibile di valore 8

C Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $9 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ II $8 \to 5 \to 2 \to 1$ III $9 \to 5 \to 7 \to 4 \to 2 \to 1$

D Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 10:

I $N_s = \{9\}$ II $N_s = \{6, 9\}$ III entrambi

E Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) è saturo:

I $N_t = \{9\}$ II $N_t = \{7, 8, 9\}$ III nessuno dei due

F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:

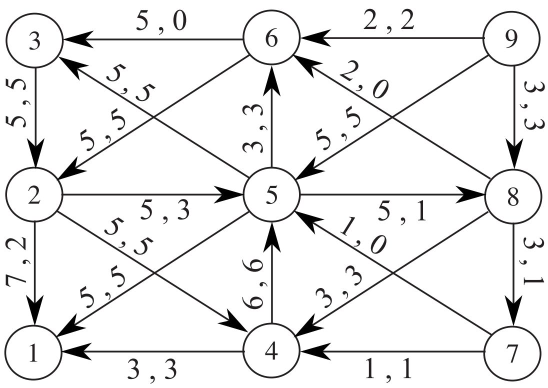
I 1 II 2 III 3

G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:

I $N_s = \{5, 9\}$ II $N_s = \{5, 7, 8, 9\}$ III nessuno dei due

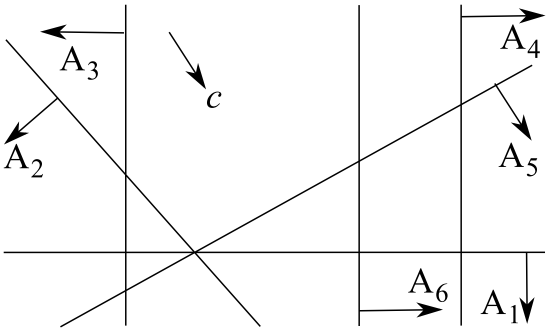
H Si discuta se sia possibile diminuire la capacità di un singolo arco affinché quello determinato dall'algoritmo di Edmons&Karp non sia l'unico taglio di capacità minima. Giustificare la risposta.

Risposta: Il flusso ottimo, di valore $v = 10$, è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso dato, reso ammissibile di valore 8 ponendo $x_{75} = 0$, inviando due unità di flusso lungo il cammino $9 \to 5 \to 2 \to 1$. Ciò richiede un'iterazione, ma l'algoritmo deve eseguire anche una seconda visita del grafo residuo, che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio (N_s, N_t), con $N_s = \{9\}$, di capacità $u(N_s, N_t) = 10$, che quindi è il taglio di capacità minima.



Con i dati del problema originale questo è l'unico taglio di capacità minima. Ciò si verifica facilmente dal fatto che da tutti i nodi non immediatamente raggiungibili da 9, sul grafo residuo, ossia 5, 6 ed 8, è possibile raggiungere 1: se esistesse un altro taglio di capacità minima ciò non potrebbe accadere. Per rendere un altro taglio di capacità minima è possibile ad esempio porre $u_{21} = 2$: ciò fa si che anche (N'_s, N'_t), con $N'_t = \{1\}$ abbia di capacità 10.

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di *PL* rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che A_3, A_4 ed A_6 sono collineari (non tutti con lo stesso verso), e separatamente A_5 e c sono collineari.



A Per $B = \{1, 2\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III entrambe le cose sono vere

B Per $B = \{4, 5\}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

C Per $B = \{2, 5\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III entrambe le cose sono vere

D Per $B = \{3, 4\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III non è una base

E Se la base corrente fosse $B = \{4, 5\}$ e si scegliesse $k = 1$, per $\eta_B = A_k A_B^{-1}$ si avrebbe

I $\eta_4 > 0$ II $\eta_5 > 0$ III entrambe le cose

F Se la base corrente fosse $B = \{4, 5\}$ e si scegliesse $k = 6$, per $\eta_B = A_k A_B^{-1}$ si avrebbe

I $\eta_4 > 0$ II $\eta_5 > 0$ III entrambe le cose

G Se la base corrente fosse $B = \{1, 4\}$ e si scegliesse $k = 5$, si avrebbe

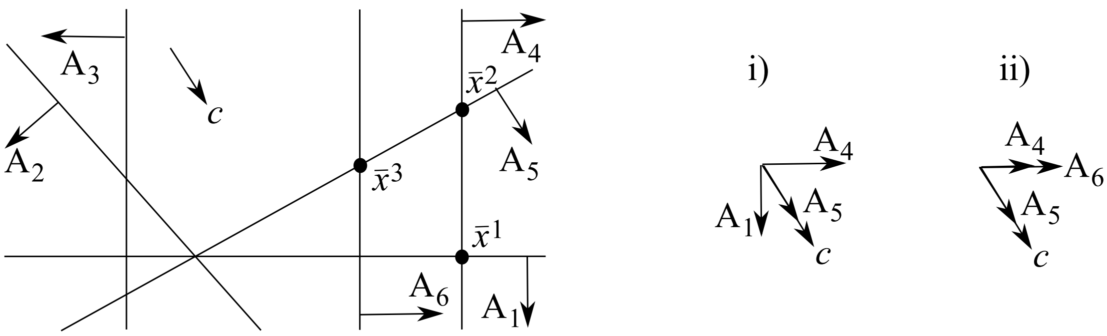
I $\eta_1 > 0$ II $\eta_4 > 0$ III entrambe le cose

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{1, 4\}$, discutendo tutti i passi effettuati. Si discuta inoltre l'unicità della soluzione primale e duale ottenuta. Si giustifichino geometricamente tutte le risposte

Risposta: La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 1 e 4). La base è duale ammissibile (come è necessario che sia) in quanto c appartiene a *cono*$(\{A_1, A_4\})$ ma non primale ammissibile: infatti viola i vincoli 5 e 6. Per la regola anticiclo di Bland si seleziona quindi $k = 5$. Come già visto nel punto precedente si ha allora $\eta_1 > 0$ ed $\eta_4 > 0$. Ma c è collineare con A_5: ne segue che $\bar{y}_1/\eta_1 = \bar{y}_4/\eta_4$; pertanto, ancora per la regola anticiclo di Bland si seleziona quindi $h = 1$.

Alla seconda iterazione la base è quindi $B = \{4, 5\}$, che è ancora duale ammissibile (come è ovvio che sia dalla correttezza dell'algoritmo). La corrispondente soluzione primale di base $\bar{x}^2$, nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 4 e 5, non è primale ammissibile in quanto viola il vincolo 6: pertanto $k = 6$. Come già visto in un punto precedente, $\eta_4 > 0$ ma $\eta_5 = 0$ in quanto A_6 è collineare ad A_4, come mostrato in ii); pertanto necessariamente $h = 4$.

Alla terza iterazione la base duale ammissibile è quindi $B = \{5, 6\}$; la corrispondente soluzione primale di base $\bar{x}^3$, nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 5 e 6, è anche primale ammissibile e quindi l'algoritmo termina.



Poiché la base ottima è primale non degenere, la soluzione ottima duale è unica. Poiché però la soluzione ottima duale di base è invece degenere ($\bar{y}_6 = 0$, si veda di nuovo ii)), il primale potrebbe avere soluzioni ottime multiple. È infatti immediato verificare che ciò è vero, dato che, come visto in un punto precedente, anche la base $\{2, 5\}$ è primale e duale ammissibile e quindi ottima, ma individua un diverso vertice del poliedro: pertanto, tutte le soluzioni primali nella combinazione convessa (faccia, anzi faccetta del poliedro) tra questi due vertici sono (tutte e sole le) soluzioni ottime.

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non crescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ & x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ II $\{x_2, x_4, x_3, x_1\}$ III $\{x_3, x_1, x_2, x_4\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è a componenti intere

II La soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere se il lato destro del vincolo viene posto a 8

III La soluzione ammissibile di partenza cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 9

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 6$, $\bar{z} = 11/2$ II $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 5$ III $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 11/2$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_4 II x_4, x_3 III nessuna

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due nodi dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 5$, $\bar{z} = 5$ II $z = 5$, $\bar{z} = 16/3$ III $z = 9$, $\bar{z} = 9$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I $[1, 1, 1, 0]$ II $[1, 1, 1, 0], [1, 1, 0, 1]$ III $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 1]$, $[1, 0, 1, 1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per otimalità (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude due nodi per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H È possibile modificare il peso del terzo elemento in modo tale che l'algoritmo termini direttamente al nodo radice? Se sì, in che modo? Giustificare la risposta.

Risposta: È sufficiente porre il peso del terzo elemento uguale a 1: in questo modo l'ordinamento delle variabili per rendimento non crescente diventa $\{x_1, x_3, x_2, x_4\}$ e la soluzione del rilassamento coincide con la soluzione ammissibile di partenza $[1, 1, 1, 1]$ trovata dall'euristica.