1) La società Amaron S.p.A. ha deciso di aggiornare il suo approccio alla logistica distributiva sul pianeta Sirio. Per questo ha equipaggiato la sua unica navetta spaziale (NS) con due velocissimi droni a guida completamente autonoma; quando la NS si ferma da un cliente, i due droni possono essere fatti partire per consegnare automaticamente i pacchi ai due clienti più vicini, e poi tornare a quello di partenza dove la NS deve attenderli. La Amaron dispone di una mappa del pianeta sotto forma di un grafo non orientato completo $G = (V, E)$, nel quale il vertice $s \in V$ rappresenta il deposito, e tutti gli altri i clienti a cui distribuire i pacchi. Per ogni lato $\{i, j\} \in E$ è dato il tempo di volo (ovviamente simmetrico) t_{ij} richiesto alla NS per spostarsi tra i due vertici. È inoltre noto ed il tempo δ di consegna dei pacchi, assunto uguale per tutti i clienti. Per migliorare la sua (scarsa) reputazione con i clienti, la Amaron vuole velocizzare al massimo i suoi tempi di consegna: decide quindi che userà i droni per consegnare pacchi, quando la ND è arrivata al cliente i, solamente a clienti j "vicini" ad i, ossia per cui il tempo di volo da i a j, consegna e ritorno dei droni è minore del tempo di consegna δ della NS (i droni volano e consegnano più rapidamente). Per ogni $i \in V' = V \setminus \{s\}$ possiamo calcolare staticamente l'insieme dei clienti per cui questo accade. Definiamo quindi $V(i)$ l'insieme che contiene al più due clienti abbastanza vicini a i per cui possano essere serviti dai droni rilasciati in i; meno di due, fino anche a $V(i) = \emptyset$, se non ci sono abbastanza clienti vicini, ed i due più vicini in caso ce ne siano più di due. Si aiuti la Amaron S.p.A. a riguadagnare la fiducia dei suoi clienti scrivendo come *PLI* il problema di determinare la sequenza di clienti che la NS deve visitare, e per ciascun cliente se deve oppure no utilizzare i droni, e come, in modo da minimizzare il tempo totale di spostamento della NS e di consegna di tutti i pacchi.

Per formulare il problema introduciamo le classiche variabili binarie $x_{ij} \in \{0, 1\}$ per ogni $\{i, j\} \in E$ che indicano se la NS si sposta direttamente da i a j o viceversa. Consideriamo il classico grafo orientato $G' = (V, A)$ in cui A contiene entrambi gli archi (i, j) e (j, i) per ogni lato $\{i, j\} \in E$. Per ogni $i \in V'$ definiamo anche le variabili binarie $v_i \in \{0, 1\}$ che indicano se il cliente i viene visitato direttamente dalla NS. Infine, definiamo $V'' \subseteq V'$ l'insieme dei clienti tali che $V(i) \neq \emptyset$, e varabili $d_i \in \{0, 1\}$ per $i \in V''$ che indicano se i droni sono rilasciati in i. Parte della formulazione è riportata qua sotto:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \dots & \\
& \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} = \begin{cases} 2 & i = s \\ 2v_i & i \neq s \end{cases} & i \in V \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \{i, j\} \in E \\
& v_i \in \{0, 1\} & i \in V' \\
& d_i \in \{0, 1\} & i \in V''
\end{array}
$$

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli necessari a completare la formulazione.

A $g_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A$ — non aggiungere

B $f_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A$ — aggiungere

C $\sum_{(j,i) \in A} f_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = \begin{cases} -\sum_{h \in V'} v_h & i = s \\ v_i & i \neq s \end{cases} \quad i \in V$ — aggiungere

D $\sum_{(j,i) \in A} f_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = \begin{cases} -1 & i = s \\ 0 & i \neq s \end{cases} \quad i \in V$ — non aggiungere

E $\sum_{\{j,i\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} = \begin{cases} -\sum_{h \in V'} v_h & i = s \\ v_i & i \neq s \end{cases} \quad i \in V$ — non aggiungere

F $f_{ij} + f_{ji} \leq |V'| x_{ij} \quad \{i, j\} \in E$ — aggiungere

G $g_{ij} \leq |V'|(x_{ij} + x_{ji}) \quad (i, j) \in A$ — non aggiungere

H $d_i \leq v_i \quad i \in V''$ — aggiungere

I $d_i \geq v_i \quad i \in V''$ — non aggiungere

J $v_i + \sum_{h \in V(i)} d_h \leq 1 \quad i \in V'$ — non aggiungere

K $v_i + \sum_{h \in V(i)} d_h = 1 \quad i \in V'$ — aggiungere

L $\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} g_{ij} + \delta \sum_{i \in V'} v_i$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $\sum_{\{i,j\}\in E} t_{ij}x_{ij} + \delta \sum_{i\in V'} v_i$ (funzione obiettivo) aggiungere

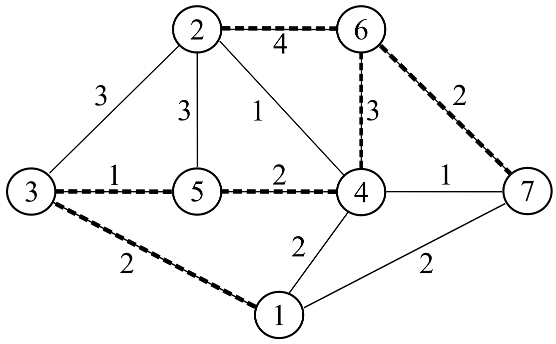
$\boxed{\text{N}}$ $\sum_{\{i,j\}\in E} t_{ij}f_{ij}x_{ij} + \delta \sum_{i\in V'} v_i$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) In realtà l'esiguo budget operativo della Amaron le consente di acquistare solo droni di seconda mano, con velocità di consegna δ pari a quella della NS. Per ogni $i \in V'$ ridefiniamo quindi come $V(i)$ (sempre $\neq \emptyset$) l'insieme dei due clienti più vicini ad i, ad assumiamo di conoscere il tempo t_i che la NS deve attendere affinché i droni vadano e tornino (pari a due volte il massimo tra i due tempi di volo). Si indichi come modificare la formulazione precedente per tenere in conto anche il tempo che deve attendere NS affinché i droni vadano e tornino e minimizzare il tempo complessivo di consegna e attesa. Si noti che la NS impiega δ a consegnare come i droni, quindi il termine δ non deve essere aggiunto al tempo di attesa (perché per quel tempo la NS sta consegnando e non attendendo).

Risposta: I droni possono essere rilasciati in ogni nodo $i \in V'$, pertanto le variabili d_i saranno adesso definite per ogni $i \in V'$ ($V'' = V'$), così come i vincoli $\boxed{\text{H}}$ e $\boxed{\text{I}}$ che le caratterizzano. Infine è necessario modificare la funzione obiettivo considerando anche il tempo di attesa complessivo:

$$\sum_{\{i,j\}\in E} t_{ij}x_{ij} + \delta \sum_{i\in V} v_i + \sum_{i\in V} t_i d_i \quad \text{(funzione obiettivo)}$$

2) Per il problema del dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{1, 3\}$ con il lato $\{1, 4\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esistono esattamente altri 3 alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello dato

II Il costo dell'albero di copertura di costo minimo è 14

B Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno II $\{\{2, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$ III $\{\{2, 6\}, \{4, 6\}, \{6, 7\}\}$

C Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1, 7\}$ e $\{2, 4\}$ II $\{1, 7\}$ e $\{4, 7\}$ III $\{\{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 7\}\}$

D Quali sostituzioni di lati bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

I $\{2, 6\}$ e $\{4, 6\}$ con $\{1, 7\}$ e $\{4, 7\}$

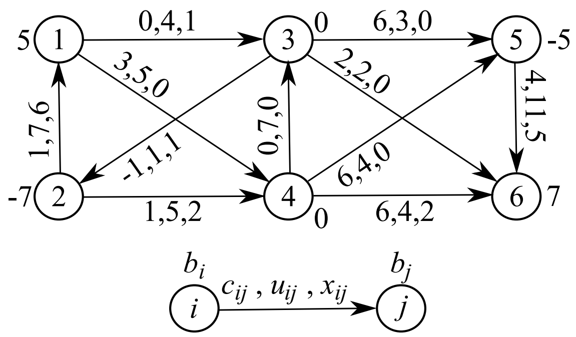
II $\{\{2, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$ con $\{\{1, 7\}, \{2, 4\}, \{4, 7\}\}$

III $\{2, 6\}$ con $\{2, 4\}$

E Modificare il costo del minor numero possibile di lati affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta.

Risposta: Le condizioni $c_{26} \leq 1$, $c_{46} \leq 1$, $c_{67} \leq 1$ garantiscono che qualsiasi lato $\{i, j\}$ dell'albero abbia costo minore di tutti gli altri lati del taglio che si viene a formate quando $\{i, j\}$ viene eliminato all'albero (condizione di ottimalità per tagli), il che implica che l'albero è una soluzione ottima del problema.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[5, -7, 0, 0, -5, 7]$ II $[-5, 7, 0, 0, 5, -7]$ III $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 73 II 39 III 70

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $4 \to 3 \to 6 \to 4$ II $2 \to 1 \to 4 \to 2$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 5$ II $6 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ III entrambi

E Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

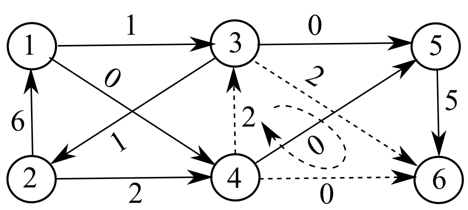
I $4 \to 3 \to 6 \to 4$ II $4 \to 1 \to 3 \to 6 \to 4$ III entrambi

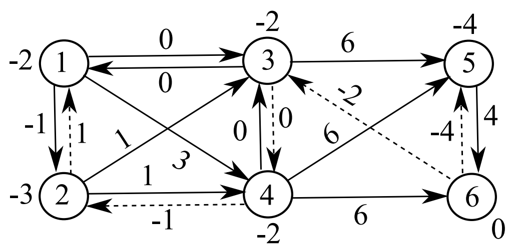
F Si dica se lo pseudoflusso è oppure no un flusso ammissibile, ed altrimenti si indichi come costruirne uno modificando il minor numero possibile di deficit dei noti. Una volta individuato il flusso ammissibile si esegua a partire da esso l'algoritmo della cancellazione di cicli, mostrando le iterazioni mostrate e dimostrando che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso ha già vettore di sbilanciamenti tutto nullo (si veda la prima domanda) e quindi è già un flusso ammissibile. Non è però ottimo in quanto esiste il ciclo $C = 4 \to 3 \to 6 \to 4$ che è aumentante (si veda $\boxed{\text{C}}$), in quanto ha capacità

$$\theta(\, C \,,\, x \,) = \min\{\, u_{43} - x_{43} \,,\, u_{36} - x_{36} \,,\, x_{46} \,\} = \min\{\, 7 - 0 \,,\, 2 - 0 \,,\, 2 \,\} = 2 > 0$$

ed ha costo $C(\, C \,) = c_{43} + c_{36} - c_{64} = 0 + 2 - 6 = -4 < 0$ (si veda $\boxed{\text{E}}$). Inviando $\theta(\, C \,,\, x \,) = 2$ unità di flusso lungo C si ottiene il flusso ammissibile $x' = x \oplus 2C$ illustrato in figura qui sotto a sinistra, che è ottimo. Per dimostrarlo basta costruire il grafo residuo rispetto a x' e calcolarne un albero dei cammini minimi, che sono mostrati accanto a destra (gli archi tratteggiati sono quelli dell'albero) insieme al vettore di etichette che rispetta le condizioni di Bellman. Questo dimostra che sul grafo residuo non esistono cicli orientati di costo negativo, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto al flusso ammissibile x'.





4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, al problema di PL dato qui accanto.

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & -3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6
\end{array}
$$

A Per $B = \{1, 3\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile   II è una base primale degenere   III nessuna delle due cose

B Per $B = \{1, 3\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile   II è una base primale non degenere   III entrambe le cose

C Per $B = \{2, 5\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile   II è una base primale degenere   III non è una base

D Se la base corrente è $B = \{2, 4\}$, l'indice uscente determinato dall'algoritmo è

I $h = 2$ II $h = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

E Se la base corrente è $B = \{2, 4\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 4$ è

I ammissibile   II di crescita   III entrambe le cose

F Se la base corrente è $B = \{3, 4\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 3$ è

I ammissibile   II di crescita   III entrambe le cose

G Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{3, 4\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte. Infine si discuta come cambierebbero le conclusioni se il vettore dei costi c fosse $[1, 1]$ invece che $[1, 2]$. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{3, 4\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = [1, 2] \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [-1/2, 7/4] \quad , \quad \bar{y} = [\bar{y}_B, \bar{y}_N] = [0, 0, -1/2, 7/4, 0]$$

$$h = \min\{ i \in B : \bar{y}_i < 0 \} = 3 \ , \ B(h) = 1 \ , \ \xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = - \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \leq 0$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato. Infatti, è immediato verificare che

$$c\xi = [1, 2] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1/2 > 0 \ ,$$

ossia ξ è una direzione di crescita. Poiché abbiamo verificato che $A_N \xi \leq 0$, mentre $A_B \xi \leq 0$ per costruzione, si ha che $A\xi \leq 0$, ossia ξ appartiene al cono di recessione del poliedro. Quindi, la soluzione

$$x(\alpha) = \bar{x} + \alpha \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

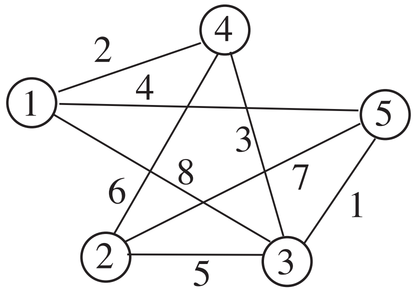
è ammissibile per ogni valore di $\alpha \geq 0$, ed il suo valore della funzione obiettivo, $cx(\alpha) = \alpha/2 + 2$, cresce con α.

Se il vettore dei costi c fosse $[1, 1]$ invece che $[1, 2]$ si avrebbe

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} [1, 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [-1/2, 5/4]$$

e quindi la conclusione non cambierebbe: verrebbe selezionata la stessa direzione ξ, che sarebbe sempre di crescita ed appartenente al cono di recessione del poliedro, e pertanto il problema sarebbe sempre superiormente illimitato (e l'algoritmo terminerebbe avendolo dimostrato).

5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal nodo 1 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell'1-albero (se ve n'è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l'albero delle decisioni è visitato in ampiezza. I figli di ogni nodo nell'albero delle decisioni vengono visitati in ordine lessicografico crescente dei corrispondenti archi fissati a zero (ad esempio, il nodo corrispondente a fissare a zero $\{1, 2\}$ viene visitato prima di quello corrispondente a $\{1, 3\}$). Si risponda alle seguenti domande:



A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I Il lato $\{1, 5\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano individuato dall'euristica

II L'1-albero di costo minimo calcolato alla radice non è un ciclo Hamiltoniano

III Nessuna delle precendenti

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 12$, $\bar{z} = 15$ II $\underline{z} = 15$, $\bar{z} = +\infty$ III $\underline{z} = 15$, $\bar{z} = 18$

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I 3: x_{23}, x_{34}, x_{35} II 3: x_{14}, x_{24}, x_{34} III nessuna (l'algoritmo termina)

D Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità, 1 per la valutazione superiore

II 2 per la valutazione inferiore

III 1 per la valutazione inferiore, 1 per ottimalità

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $z \le z(P) \le \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

I $z = 18$, $\bar{z} = 18$ II $z = 16$, $\bar{z} = +\infty$ III $z = 16$, $\bar{z} = 18$

F È possibile modificare il grafo di partenza aggiungendo il solo lato $\{1, 2\}$ con il relativo costo in modo tale che l'algoritmo termini alla radice (l'1-albero determinato sia un ciclo Hamiltoniano)? Giustificare la scelta effettuata.

Risposta: Non è possibile ottenere un ciclo Hamiltoniano al nodo radice inserendo il lato $\{1, 2\}$, qualsiasi sia il costo. Infatti, se $c_{12} \ge 4$ l'algoritmo di Kruskal individua il ciclo $\{\{3, 5\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}, \{5, 4\}\}$ al quale va aggiunto l'arco di costo minimo tra quelli rimasti per determinare l'1-albero; questo non può determinare in nessun modo un ciclo Hamiltoniano. Se invece $c_{12} \le 4$, l'algoritmo di Kruskal individua l'albero $\{\{3, 5\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}, \{1, 2\}\}$ al quale va aggiunto l'arco di costo minimo tra quelli rimasti, cioè $\{1, 5\}$, e di conseguenza il nodo 1 avrebbe grado 3. In entrambi i casi l'1-albero determinato non è un ciclo Hamiltoniano.