1) Teucri ed Achei si battono furiosamente sotto le mura di Ilio. Guidati da Ares ed Afrodite, i figli di Priamo stanno avendo la meglio, e sono arrivati vicino alle nere navi dei Danai; se riuscissero a bruciarle, per gli Argivi non ci sarebbe più ritorno sul mare colore del vino. Per questo Atena, dea della saggezza ed alleata dei Greci, spinge il re Agamennone ad organizzare un contrattacco con i cocchi per fermare l'avanzata nemica. Il figlio di Atreo ha a disposizione n Eroi (E), n Cocchi (C) trainati da focose pariglie di cavalli e n Aurighi (A) per condurli; per ogni tripla (e, c, a) con $e \in E$, $c \in C$ e $a \in A$, i vaticini della dea con lo sguardo scintillante forniscono la misura $f_{e,c,a} > 0$ della forza che avrebbe in battaglia l'eroe "e" se fosse montato sul cocchio "c" ed accompagnato dall'auriga "a". Il re di Micene chiede aiuto all'astuto Ulisse per determinare le n combinazioni di eroi, cocchi ed aurighi che hanno la forza totale (somma delle forze delle triple prescelte) maggiore. Aiutate Odisseo a compiere il volere del Fato scrivendo il modello di *PLI* del corrispondente problema.

Per formulare il problema introduciamo per ogni $e \in E$, $c \in C$ e $a \in A$ le variabili binarie

$$x_{e,c,a} = \begin{cases} 1 & \text{se l'eroe "}e\text{" viene mandato in battaglia montato sul cocchio "}c\text{" ed accompagnato dall'auriga "}a\text{"} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parte della formulazione è riportata qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \max & \dots & \\ & \dots & \\ & x_{e,c,a} \in \{0, 1\} & e \in E\,,\ c \in C\,,\ a \in A \end{array}$$

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli necessari a completare la formulazione.

A $x_{e,c} \in \{0, 1\} \quad e \in E\,,\ c \in C$ — aggiungere

B $x_{c,a} \in \{0, 1\} \quad c \in C\,,\ a \in A$ — aggiungere

C $\sum_{e \in E} x_{e,c,a} = 1 \quad c \in C\,,\ a \in A$ — non aggiungere

D $\sum_{c \in C} x_{e,c,a} = 1 \quad e \in E\,,\ a \in A$ — non aggiungere

E $\sum_{a \in A} x_{e,c,a} = 1 \quad c \in C\,,\ a \in A$ — non aggiungere

F $\sum_{c \in C} x_{e,c} = 1 \quad e \in E$ — aggiungere

G $\sum_{e \in E} x_{e,c} = 1 \quad c \in C$ — aggiungere

H $\sum_{c \in C} x_{c,a} = 1 \quad a \in A$ — aggiungere

I $\sum_{a \in A} x_{c,a} = 1 \quad c \in C$ — aggiungere

J $x_{e,c,a} = x_{e,c}\, x_{c,a} \quad e \in E\,,\ c \in C\,,\ a \in A$ — non aggiungere

K $x_{e,c,a} \leq x_{e,c} \quad e \in E\,,\ c \in C\,,\ a \in A$ — aggiungere

L $x_{e,c,a} \leq x_{c,a} \quad e \in E\,,\ c \in C\,,\ a \in A$ — aggiungere

M $\max \sum_{e \in E} \sum_{c \in C} \sum_{a \in A} f_{e,c,a}\, x_{e,c}\, x_{c,a}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

N $\max \sum_{e \in E} \sum_{c \in C} \sum_{a \in A} f_{e,c,a}\, x_{e,c,a}$ (funzione obiettivo) — aggiungere

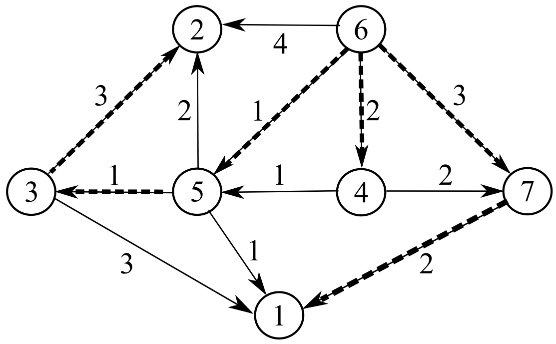
O $\max \sum_{c \in C} f_{e,c,a} \left(\sum_{e \in E} x_{e,c} + \sum_{a \in A} x_{c,a} \right)$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

domanda b) Hera, la moglie di Zeus ed anch'essa dalla parte dei nativi dell'Argolide, seduce il marito e, nel vortice della passione, lo porta a confessare quale sia l'insieme I delle triple $(\, e\, ,\, c\, ,\, a\,)$ che sono talmente invise al Re degli Dei per cui Egli interverrebbe immediatamente, dando la vittoria ai discendenti di Teucro, se anche una sola di esse si mostrasse in battaglia. La dea del matrimonio, della fedeltà coniugale e del parto invia quindi al re di Itaca una visione per rivelargli quali triple non debbano assolutamente essere formate. Si discuta di come modificare il modello per tener conto di questo fondamentale auspicio.

Risposta: è sufficiente aggiungere i vincoli

$$x_{e,c,a} = 0 \qquad (\, e\, ,\, c\, ,\, a\,) \in I\ .$$

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 6 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quale delle seguenti affermazioni sull'albero a destra è corretta?

I Sostituendo l'arco $(6, 5)$ con l'arco $(4, 5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Il costo dell'albero è 12

III Nessuna delle precedenti

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire la buona numerazione che lo dimostra.

I No | II Si: $[2, 1, 3, 6, 4, 7, 5]$ | III Si: $[6, 7, 5, 2, 4, 1, 3]$

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(5, 1), (5, 2), (6, 2)\}$ | II $\{(3, 1), (5, 1)\}$ | III $\{(5, 2), (6, 2)\}$

D Qual è il minor numero di archi da sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I 1 | II 2 | III 3

E Qual è il vettore di etichette di un albero dei cammini minimi?

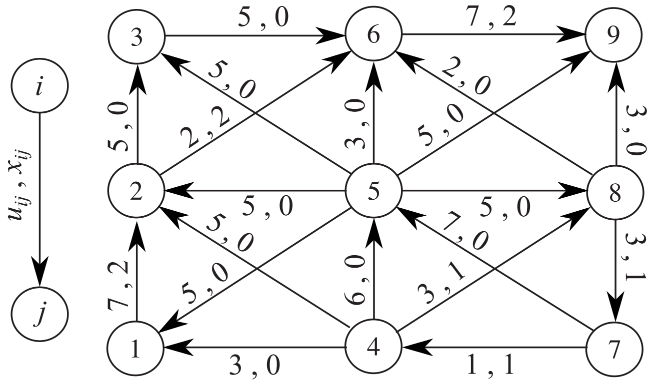
I $d = [5, 5, 2, 2, 1, 0, 3]$ | II $d = [5, 4, 2, 2, 1, 0, 4]$ | III $d = [2, 3, 2, 2, 1, 0, 3]$

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Modificare poi i costi del minor numero possibile di archi dell'albero mantenendoli non negativi e in maniera tale che quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare le risposte.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte, basta modificare gli archi fuori dell'albero in modo tale che $c_{62} \geq 5$, $c_{51} \geq 4$ e $c_{52} \geq 4$. Ovviamente questo è il numero minimo: se il costo di qualcuno di questi non fosse modificato l'arco continuerebbe a violare le condizioni di Bellman e quindi l'albero a non essere ottimo.

Alternativamente, modificando i costi di $(3, 2)$ e $(6, 7)$ in modo tale che $c_{32} = c_{67} = 0$, di ottiene che $d[7] = 0$, $d[1] = 2$ e $d[2] = 2$: anche questo vettore di etichette rispetta le condizioni di Bellman, e quindi garantisce che l'albero sia ottimo. Poiché gli archi che violano le condizioni di Bellman, ossia $\{(5, 1), (5, 2), (6, 2)\}$, hanno nodi terminali 1 e 2, per fare in modo che le corrispondenti etichette diminuiscano bisogna modificare (ridurre) il costo di almeno un arco nel cammino che li collega alla radice (6). Poiché i due cammini sono disgiunti non è possibile modificare il costo di meno di due archi.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 9 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 3 II non ammissibile III ammissibile di valore 2

B Ponendo $x_{48} = 2$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 4 II non ammissibile III ammissibile di valore 2

C Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $1 \to 5 \to 9$ II $1 \to 2 \to 6 \to 9$ III $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 9$

D Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 7:

I $N_s = \{1, 2\}$ II $N_s = \{1, 2, 3\}$ III entrambi

E Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) è saturo:

I $N_t = \{9\}$ II $N_s = \{1, 2, 3\}$ III nessuno dei due

F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:

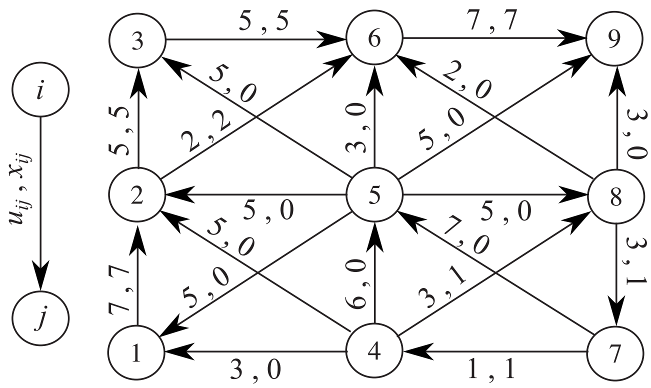
I 1 II 2 III 3

G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:

I $N_s = \{1, 2, 3\}$ II $N_t = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ III nessuno dei due

H Si discuta se sia possibile aumentare la capacità di non più di due archi affinché il flusso ottenuto dall'algoritmo di Edmons&Karp non sia più ottimo. Giustificare la risposta.

Risposta: Il flusso ottimo, di valore $v = 7$, è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso dato, inviando 5 unità di flusso lungo il cammino aumentante $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 9$ (cf. C). Ciò richiede un'iterazione, ma l'algoritmo deve eseguire anche una seconda visita del grafo residuo (cf. F), che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio saturo (N_s, N_t) (cf. D), con $N_s = \{1, 2\}$, di capacità $u(N_s, N_t) = u_{23} + u_{26} = 5 + 2 = 7$ (somma delle capacità degli archi diretti nel taglio), che quindi è il taglio di capacità minima.



Questo però non è l'unico taglio di capacità minima: infatti è immediato verificare che anche i tagli $N_s = \{1\}$, $N_s = \{1, 2, 3\}$ ed $N_t = \{9\}$ hanno la stessa capacità pari a 7. Per poter ottenere un flusso di valore superiore a 7 la capacità di tutti questi tagli dovrebbe aumentare, il che significa aumentare la capacità di almeno uno degli archi diretti nel taglio per ciascuno di essi. Questi sono $(1, 2)$ per $N_s = \{1\}$, $(2, 3)$ ed $(2, 6)$ per $N_s = \{1, 2\}$, $(2, 6)$ ed $(3, 6)$ per $N_s = \{1, 2, 3\}$, e $(6, 9)$ per $N_t = \{9\}$. Quindi non è possibile ottenere il risultato voluto aumentando la capacità di soli due archi.

4) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto, parametrico in α, ed il corrispondente problema duale (D).

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 4x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & \alpha \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -4 \\ & & - & x_2 & \leq & -1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta per $\alpha = 1$?

I La soluzione $x = [\,2\,,\,1\,]$ è primale ammissibile

II La soluzione $x = [\,2\,,\,1\,]$ è primale degenere

III Nessuna delle due

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta per $\alpha = 3$?

I La soluzione $x = [\,2\,,\,1\,]$ è primale ammissibile

II La soluzione $x = [\,2\,,\,1\,]$ è primale degenere

III Entrambe le cose

C Quale delle seguenti direzioni è di crescita per (P)?

I $\xi = [\,1\,,\,-2\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precedenti

D Se $\alpha = 2$, $x = [\,2\,,\,1\,]$ è:

I l'unica soluzione ottima di (P) II una delle infinite soluzioni ottime di (P) III nessuna delle precedenti

E Se $\alpha = 2$, quali delle seguenti direzioni è di decrescita per (D)?

I $d = [\,-1\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,1\,]$ II $d = [\,2\,,\,0\,,\,-1\,,\,0\,,\,0\,]$ III entrambe le precedenti

F Se $\alpha = 2$, il problema duale (D) ha:

I un'unica soluzione ottima II infinite soluzioni ottime III nessuna soluzione ottima (è vuoto oppure illimitato)

G Per $\alpha = 2$, è possibile, aumentando un solo lato destro b_i dei vincoli $Ax \leq b$ di (P) (ad eccezione di $i = 1$), rendere la soluzione primale ottima non degenere? Giustificare la risposta.

Come abbiamo già visto in D e seguenti, se $\alpha = 2$ la soluzione $x = [\,2\,,\,1\,]$ è ammissibile per (P) ed ottima. Infatti, (D) è

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & 2y_1 & + & 3y_2 & - & 4y_3 & - & y_4 & + & 2y_5 & & \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & & & = & 4 \\ & & & y_2 & - & 2y_3 & - & y_4 & + & y_5 & = & 2 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Per l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x si ha $I(\,x\,) = \{\, i \in \{\,1, \ldots, m\,\} \,:\, A_i x = b_i \,\} = \{\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,\}$. Per il teorema degli scarti complementari, una soluzione duale y, tale che $yA = c$, che formi con x una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la sola condizione $y_5 = 0$. Affinché y sia poi ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 4 \\ & & y_2 & - & 2y_3 & - & y_4 & = & 2 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

la cui parte di uguaglianza, avendo due equazioni (linearmente indipendenti) in quattro incognite, ha ovviamente infinite soluzioni governate da due parametri, ossia ad esempio

$$y = [\, y_1\,,\, 6 - 2y_1 - y_4\,,\, 2 - y_1 - y_4\,,\, y_4\,,\, 0\,]\,.$$

È evidente come si possano scegliere y_1 ed y_4 per fare in modo che $y \geq 0$: ad esempio $y_1 = y_4 = 1$ porta a

$$y = [\,1\,,\,3\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,]\,,$$

ma ci sono ovviamente molti altri modi (cf. F). Ciò dimostra che $x = [\,2\,,\,1\,]$ è ottima e che è l'unica (cf. D): infatti qualsiasi soluzione ottima del primale deve rispettare le condizioni degli scarti complementari con qualsiasi soluzione ottima del duale, tra cui quella di sopra, il che significa che devono essere attivi almeno i vincoli 1, 2 e 4; ma $x = [\,2\,,\,1\,]$ è l'unica soluzione che li rispetta all'uguaglianza tutti e tre (in effetti, qualsiasi coppia di essi).

Aumentando il lato destro di uno dei vincoli $x = [\,2\,,\,1\,]$ rimane ammissibile, ed anche se si aumentasse b_2 o b_4 resterebbero comunque almeno due vincoli attivi in x. Le corrispondenti soluzioni duali di base sono ammissibili per il problema corrente e continuerebbero ad essere ammissibili, il che dimostra che x continuerebbe a rimanere ottima; ma $I(x)$ contiene 4 elementi, ed al più potrebbe essere portato a tre. Quindi x rimarrebbe comunque degenere, il che significa che la risposta alla domanda è negativa.

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non crescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ II $\{x_4, x_1, x_3, x_2\}$ III $\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è a componenti intere

II La soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere se il lato destro del vincolo viene posto a 6

III Nessuna delle precedenti

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 9/2$, $\bar{z} = 5$ II $\underline{z} = 4$, $\bar{z} = 4$ III $\underline{z} = 4$, $\bar{z} = 9/2$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_3 II x_3, x_4 III nessuna

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 4$, $\bar{z} = 17/4$ II $z = 4$, $\bar{z} = 9/2$ III $z = 4$, $\bar{z} = 4$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I $[1,1,0,0]$ II $[1,1,0,0], [1,0,1,0]$ III $[1,1,0,0]$, $[1,0,1,0]$, $[0,0,0,1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude esattamente tre nodi per otimalità (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

II L'algoritmo non chiude nessun nodo per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude almeno un nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H È possibile modificare il profitto del quarto elemento in modo tale che l'algoritmo termini direttamente al nodo radice? Se sì, in che modo? Giustificare la risposta.

Risposta: Dato il volume dello zaino, le possibili soluzioni intere ottenute al nodo radice sono $[1,0,1,0]$ o $[0,0,0,1]$ in quanto rappresentano le sole combinazioni possibili di elementi il cui volume totale sia uguale al volume dello zaino. Modificando il profitto del quarto elemento è possibile cambiare l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente in modo tale da ottenere la soluzione $[0,0,0,1]$: in questo caso è sufficiente imporre che il rendimento del quarto elemento sia maggiore del rendimento del primo elemento, cioè che il profitto del quarto elemento sia maggiore di 6.