1) L'EDEN S.p.A., azienda di produzione e distribuzione di energia elettrica, deve pianificare la produzione elettrica giornaliera di una piccola città in modo tale da soddisfare la domanda D_t, discretizzata in tre periodi (mattina, pomeriggio e notte) indicati con $t \in T = \{1, 2, 3\}$, ciascuno composto di L_t ore, e minimizzare i costi totali sostenuti. L'EDEN S.p.A. ha a disposizione 2 differenti tipi di generatori G. Per ciascun tipo $i \in G$, il numero massimo di generatori disponibili è pari a N_i, i generatori sono caratterizzati dalla stessa capacità massima $C_i^{\max}$, e possono rimanere accesi solo se connessi alla rete e la produzione richiesta è almeno pari al livello minimo di $C_i^{\min}$ MWh. Ciascun generatore connesso alla rete in ciascuna ora del periodo t paga un costo fisso CF_i, e poi un costo CS_i per ogni MWh di produzione oltre la soglia minima ($i \in G$). Inoltre, si paga un costo di accensione CA_i ($i \in G$) quando un generatore viene acceso; per ragioni di sicurezza un generatore può essere acceso o spento solamente all'inizio di un periodo. Formulare il problema come *PLI*.

Per formulare il problema introduciamo per ogni tipo di generatore $i \in G$ e periodo $t \in T$ le variabili intere non negative:

- $x_{i,t}$ pari al numero di generatori di tipo i accesi all'inizio del periodo t;
- $y_{i,t}$ pari al numero di generatori di tipo i connessi alla rete all'inizio del periodo t;
- $s_{i,t}$ pari alla produzione in MWh eccedente la soglia minima $C_i^{\min}$ per i generatori di tipo i.

Parte della formulazione è riportata qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \ldots \\ & \ldots \\ & x_{i,t}\,,\; y_{i,t}\,,\; s_{i,t} \in \mathbb{Z}_+ && i \in G\,,\; t \in T \end{aligned}$$

domanda a) Selezionare tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti tutti quelli necessari a completare la formulazione.

A $h_{i,t} \in \{0, 1\}$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — non aggiungere

B $d_t \in \{0, 1\}$ $\quad t \in T$ — non aggiungere

C $y_{i,t} \leq N_i$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — aggiungere

D $y_{i,t} \geq N_i$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — non aggiungere

E $x_{i,t} \leq y_{i,t}$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — non aggiungere

F $x_{i,t} \geq y_{i,t} - y_{i,t-1}$ $\quad i \in G\,,\; t \in \{1, 2\}$ — aggiungere

G $x_{i,t} \leq h_{i,t}\, y_{i,t}$ $\quad i \in G\,,\; t \in \{1, 2\}$ — non aggiungere

H $\sum_{i \in G} \left(C_i^{\min} y_{i,t} + s_{i,t} \right) \geq D_t$ $\quad t \in T$ — aggiungere

I $\sum_{i \in G} \left(C_i^{\min} y_{i,t} + s_{i,t} \right) \geq D_t d_t$ $\quad t \in T$ — non aggiungere

J $s_{i,t} \leq (C_i^{\max} - C_i^{\min}) y_{i,t}$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — aggiungere

K $s_{i,t} \leq (C_i^{\max} - C_i^{\min}) N_i h_{i,t}$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — non aggiungere

L $s_{i,t} \leq (C_i^{\max} - C_i^{\min}) h_{i,t}$ $\quad i \in G\,,\; t \in T$ — non aggiungere

M $\sum_{i \in G} \sum_{t \in T} (CA_i x_{i,t} + L_t (CF_i + CS_i) y_{i,t})$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

N $\sum_{i \in G} \sum_{t \in T} (CA_i x_{i,t} + L_t (CF_i y_{i,t} + CS_i s_{i,t}))$ (funzione obiettivo) — aggiungere

O $\sum_{i \in G} \sum_{t \in T} (CA_i x_{i,t} + CF_i y_{i,t} + CS_i s_{i,t})$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

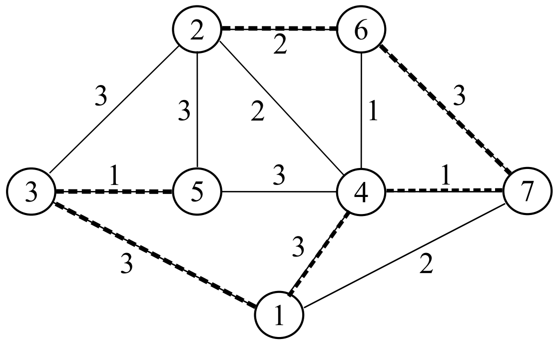
domanda b) Come cambierebbe la formulazione precedente, nel caso in cui l'azienda consideri tra i costi da minimizzare anche un costo fisso $CFS_i > 0$ per generatori di tipo $i \in G$ per la produzione di energia elettrica oltre la soglia $C_i^{\min}$ in ciascun periodo?

Risposta: Nella nuova formulazione bisognerebbe aggiungere le variabili binarie $h_{i,t}$ della risposta $\boxed{\text{A}}$, che invece non sono necessarie per il problema originario. Aggiungendo anche il vincolo $\boxed{\text{K}}$ si otterrebbe che $s_{i,t} > 0 \Longrightarrow h_{i,t} = 1$, ossia le variabili indicano se nel periodo t i generatori di tipo i producono una quantità strettamente maggiore della soglia minima $C_i^{\min}$. Se ciò non accade $h_{i,t}$ è libera di assumere il valore 0. È sufficiente quindi modificare la funzione obiettivo tendendo conto dei nuovi costi fissi nel modo seguente:

$$\sum_{i\in G} \sum_{t\in T} (\, CA_i x_{i,t} + CSF_i h_{i,t} + L_t (\, CF_i y_{i,t} + CS_i s_{i,t} \,)\,)$$

Poiché $CFS_i > 0$, se $h_{i,t}$ può assumere il valore 0, ossia i generatori di tipo i producono esattamente $C_i^{\min}$ oppure sono tutti spenti, allora questo accadrà necessariamente nella soluzione ottima del problema.

2) Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{6, 7\}$ con il lato $\{2, 5\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esistono esattamente altri 2 alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello dato

II Il costo dell'albero di copertura dato è 43

B Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno II $\{\{2, 6\}, \{1, 4\}, \{6, 7\}\}$ III $\{1, 4\}$ e $\{6, 7\}$

C Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1, 7\}$ e $\{2, 4\}$ II $\{\{1, 7\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}\}$ III nessuna delle precedenti

D Quali sostituzioni di lati bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

I $\{1, 4\}$ e $\{6, 7\}$ con $\{1, 7\}$ e $\{4, 6\}$

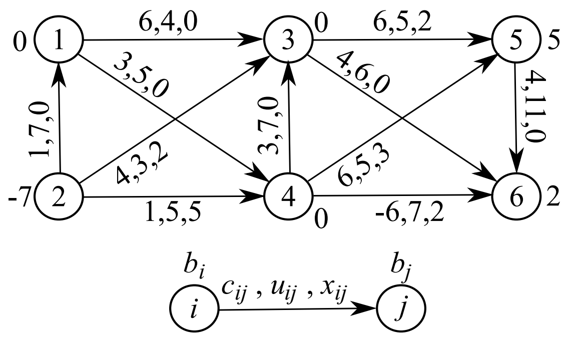
II $\{\{2, 6\}, \{1, 4\}, \{6, 7\}\}$ con $\{\{1, 7\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}\}$

III entrambe le precedenti sono corrette

E Modificare il costo del minor numero possibile di lati affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta.

Risposta: Le condizioni $c_{67} \leq 1$, $c_{14} \leq 2$ garantiscono che qualsiasi lato $\{i, j\}$ dell'albero abbia costo minore di tutti gli altri lati del taglio che si viene a formate quando $\{i, j\}$ viene eliminato all'albero (condizione di ottimalità per tagli), il che implica che l'albero è una soluzione ottima del problema. L'alternativa sarebbe aumentare il costo dei lati fuori dall'albero che non rispettano l'ottimalità per cicli, ma questi sono tre (cf. C) e quindi non è possibile modificare il costo di un numero di lati strettamente minore di due.

3) Per il problema dello flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[0, 7, 0, 0, 5, -2]$ II $[-7, 7, 0, 0, -5, -2]$ III $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 31 II 35 III 42

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 4$ II $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 5$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

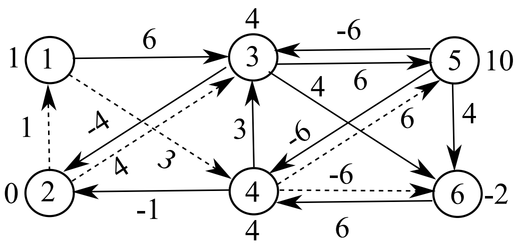
I $2 \to 4 \to 5 \to 6$ II $2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5$ III nessuno dei due

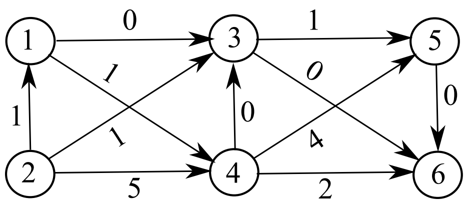
E Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $4 \to 6 \to 5 \to 4$ II $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 5$ III entrambi

F Si dica se lo pseudoflusso è oppure no minimale, ed altrimenti si indichi come costruirne uno. Una volta individuato lo pseudoflusso minimale si esegua a partire da esso l'algoritmo dei cammini minimi successivi, mostrando le iterazioni mostrate e discutendo la soluzione ottenuta. Infine si discuta se la soluzione ottima è unica. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso è minimale. Per verificarlo basta costruire il grafo residuo rispetto allo pseudoflusso x e calcolare un albero dei cammini minimi con un insieme di radici opportune tale che raggiunga tutti i nodi; in questo caso abbiamo scelto arbitrariamente il nodo 2. Tale costruzione è mostrata nella figura seguente, sotto a sinistra: gli archi tratteggiati sono quelli dell'albero, e le etichette dei nodi rispettano le condizioni di Bellman. Questo dimostra che sul grafo residuo non esistono cicli orientati di costo negativo, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto allo pseudoflusso x.

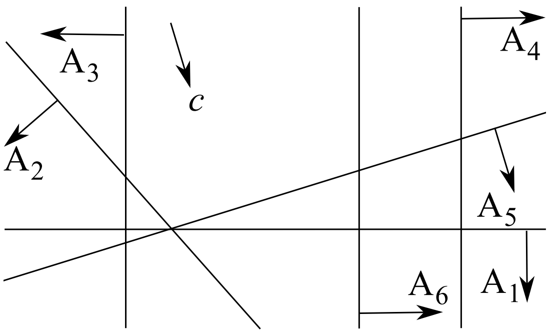




Poiché non esistono nodi con sbilanciamento positivo (e quindi con sbilanciamento negativo), il flusso è già ammissibile e l'algoritmo termina immediatamente dichiarando che è ottimo.

Non è però l'unico flusso ottimo. Ciò è reso evidente dal fatto che esistono archi del grafo residuo che rispettano le condizioni di Bellman all'uguaglianza pur non facendo parte dell'albero dei cammini minimi; ciò indica la possibilità di cicli a costo nullo. Uno di tali archi è $(5, 3)$, che in effetti fa parte del ciclo $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 5$, che ha costo nullo (cf. E). È quindi possibile inviare una quantità non nulla di flusso lungo quel ciclo, che è certamente aumentante (cf. C), ottenendo altre soluzioni ammissibili con lo stesso costo, e quindi ottime. Sopra a destra è mostrata una di tali soluzioni, corrispondenti ad aver inviato $\theta = 1$ unità di flusso lungo il ciclo indicato.

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di *PL* rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che A_3, A_4 ed A_6 sono collineari (non tutti con lo stesso verso), e separatamente A_5 e c sono collineari.



$\boxed{\text{A}}$ Per $B = \{\,1\,,\,2\,\}$ si può afferare che

$\boxed{\text{I}}$ è una base primale ammissibile $\boxed{\text{II}}$ è una base primale degenere $\boxed{\text{III}}$ entrambe le cose sono vere

$\boxed{\text{B}}$ Per $B = \{\,2\,,\,5\,\}$ si può afferare che

$\boxed{\text{I}}$ è una base duale ammissibile $\boxed{\text{II}}$ è una base duale degenere $\boxed{\text{III}}$ entrambe le cose sono vere

$\boxed{\text{C}}$ Per $B = \{\,3\,,\,4\,\}$ si può afferare che

$\boxed{\text{I}}$ è una base primale ammissibile $\boxed{\text{II}}$ è una base primale degenere $\boxed{\text{III}}$ non è una base

$\boxed{\text{D}}$ Se la base corrente è $B = \{\,5\,,\,6\,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 6$ è

$\boxed{\text{I}}$ ammissibile $\boxed{\text{II}}$ di crescita $\boxed{\text{III}}$ entrambe le cose sono vere

$\boxed{\text{E}}$ Se la base corrente è $B = \{\,1\,,\,2\,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 2$ è

$\boxed{\text{I}}$ ammissibile $\boxed{\text{II}}$ di crescita $\boxed{\text{III}}$ nessuna delle due cose è vera

$\boxed{\text{F}}$ Se la base corrente è $B = \{\,1\,,\,2\,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

$\boxed{\text{I}}$ ammissibile $\boxed{\text{II}}$ di crescita $\boxed{\text{III}}$ entrambe le cose

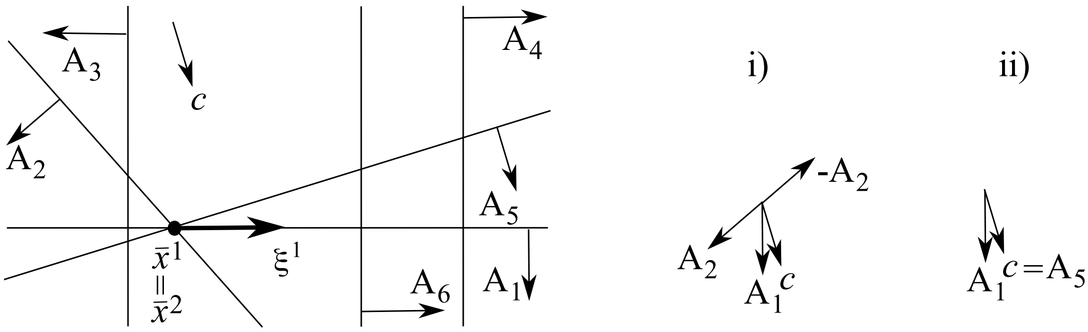
$\boxed{\text{G}}$ Se la base corrente è $B = \{\,5\,,\,6\,\}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è

$\boxed{\text{I}}$ $h = 5$ $\boxed{\text{II}}$ $h = 6$ $\boxed{\text{III}}$ nessuno (l'algoritmo termina)

$\boxed{\text{H}}$ Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\,1\,,\,2\,\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte. Infine si discuta l'unicità della soluzione primale ottenuta, giustificando la risposta.

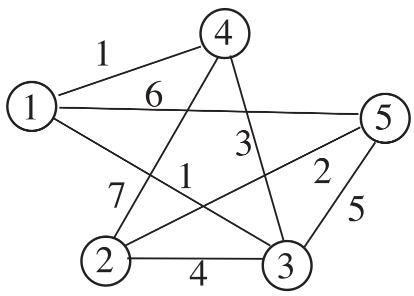
Risposta: La soluzione di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 1 e 2). La base è primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti c appartiene a *cono*$(\{\,A_1\,,\,-A_2\,\})$, come mostrato in i), e quindi $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 < 0$. Pertanto $h = 2$ e si determina la direzione ξ^1 mostrata in figura qui sotto. La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) ma non è ammissibile (cf. $\boxed{\text{E}}$); infatti ha prodotto scalare positivo (forma un angolo minore di 90 gradi) con A_4, A_5 ed A_6, ma ovviamente il massimo passo lungo ξ^1 si ha per A_5, che è attivo e quindi viene incontrato "immediatamente". Si cambia comunque la base, ponendo $k = 5$.

Alla seconda iterazione la base è quindi $B = \{\,1\,,\,5\,\}$. La corrispondente soluzione di base $\bar{x}^2$ è uguale ad $\bar{x}^1$, avendo compiuto un passo degenere. La base è duale ammissibile: infatti c appartiene al *cono*$(\{\,A_1\,,\,A_5\,\})$, come mostrato in ii), ed in effetti semplicemente a *cono*$(\{\,A_5\,\})$, essendo collineare con A_5. Si ha quindi $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$, e pertanto l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima. Questa era stata in effetti già determinata all'iterazione precedente, ma la base $B = \{\,1\,,\,2\,\}$ non era tale da certificarne l'ottimalità.



È evidente che la soluzione ottima determinata non è unica: poiché A_5 è collineare con c, tutti i punti della corrispondente faccetta del poliedro sono soluzioni ottime. Infatti, anche il vertice corrispondente alla base $B = \{\,5\,,\,6\,\}$ è una diversa soluzione ottima (cf. $\boxed{\text{G}}$), e quindi lo sono tutte (e sole) le soluzioni nell'inviluppo convesso tra questi due punti.

5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal nodo 4 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell'1-albero (se ve n'è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l'albero delle decisioni è visitato in ampiezza. I figli di ogni nodo nell'albero delle decisioni vengono visitati in ordine lessicografico crescente dei corrispondenti archi fissati a zero (ad esempio, il nodo corrispondente a fissare a zero $\{1, 2\}$ viene visitato prima di quello corrispondente a $\{1, 3\}$). Si risponda alle seguenti domande:



A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I Il lato $\{1, 4\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano individuato dall'euristica

II L'1-albero di costo minimo calcolato alla radice non è un ciclo Hamiltoniano

III Nessuna delle precendenti

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 7$, $\bar{z} = 11$ II $\underline{z} = 11$, $\bar{z} = +\infty$ III $\underline{z} = 11$, $\bar{z} = 13$

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I 3: x_{13}, x_{23}, x_{34} II 3: x_{13}, x_{14}, x_{15} III nessuna (l'algoritmo termina)

D Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità, 1 per ottimalità

II nessuno

III 2 per la valutazione inferiore

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $\underline{z} \leq z(P) \leq z$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 15$, $z = +\infty$ II $\underline{z} = 12$, $z = +\infty$ III $\underline{z} = 12$, $z = 15$

F È possibile modificare il grafo di partenza sostituendo il solo lato $\{1, 4\}$ con il lato $\{4, 5\}$ e modificando il relativo costo in modo tale che l'euristica del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal nodo 4 determini un ciclo Hamiltoniano? Giustificare la scelta effettuata.

Risposta: Non è possibile ottenere in nessun modo un ciclo Hamiltoniano: infatti se $c_{45} > 3$ l'euristica considererebbe in ordine i lati $\{\{4, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{1, 5\}\}$, ma, non esistendo il lato $\{1, 4\}$; se invece $c_{45} \leq 3$ non è possibile ottenere un ciclo Hamiltoniano in quanto l'euristica considererebbe in ordine i lati $\{\{4, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, ma, di nuovo, non esistendo il lato $\{1, 4\}$, produrrebbe una valutazione superiore $\bar{z} = +\infty$.