1) La Planet Express (PE) è l'unica navetta spaziale della celebre ditta di trasporti interstellari fondata dal Professor Farnsworth ed è alimentata da uno speciale carburante (a base di materia oscura ed estratto dal pianeta Vergon 6 dai mordicchiani) estremamente raro e costoso. La PE effettua consegne spaziali, ossia preleva un pacco su un pianeta i e lo consegna ad un altro pianeta j. Per ogni giorno è noto l'insieme $V = [\,1\,, \ldots, n\,]$ dei viaggi da fare, ciascuno identificato da una coppia origine-destinazione $(\,i_v\,, j_v\,)$, $v \in V$, che devono essere rigorosamente svolti nell'ordine dato. La strategia della PE è strettamente vincolata dalle astruse regole di dogana della giurisdizione interestellare: per ogni viaggio v deve partire dalla Terra, prelevare il pacco sul pianeta i_v, transitare su esattamente un altro pianeta intermedio $k \in K(v)$ tra quelli raggiungibili durante il viaggio, dove eventualmente si può anche ricaricare carburante, consegnare il pacco su j_v e tornare sulla Terra. Ciascun pianeta k può fornire, giornalmente, una massima quantità di carburante H_k qualsiasi sia il numero di volte che viene visitato. Il Professore, che oltre ad essere un imprenditore, insegna anche Ricerca Operativa all'università marziana, vuole scrivere un problema di *PLI* per stabilire su quali pianeti tra quelli nell'insieme $k \in K(v)$ fermarsi nel viaggio v, ed eventualmente con quanto carburante rifornire la navetta, per minimizzare i costi complessivi costituiti da un costo fisso F_k per stazionare sul pianeta k, dal costo di rifornimento β_k per unità di carburante estratto dal pianeta k, da un costo fisso G_k per ciascun rifornimento sul pianeta k, e dal costo unitario di trasporto γ per unità di distanza. Dato l'insieme $K = \cup_{v\in V} K(v)$, è nota la distanza (simmetrica) d_{ij} tra il pianeta i ed il pianeta j per ogni coppia (non ordinata) $\{\,i\,, j\,\} \in K \times K \cup \{\,t\,\}$, dove t rappresenta la Terra, il consumo di carburante c per unità di distanza, e la massima capacità T del serbatoio della PE.

Si scelgano la famiglia di variabili

$$y_{vk} = \begin{cases} 1 & \text{se la PE si ferma sul pianeta } k \text{ durante il viaggio } v \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad v \in V \ , \ k \in K(v)$$

$$C_{vk} = \text{la quantità di carburante imbarcato sul pianeta } k \in K(v) \text{ nel viaggio } v \qquad v \in V \ , \ k \in K(v)$$

$$Q_v = \text{la quantità di carburante nel serbatoio della PE alla partenza del viaggio } v \qquad v \in V$$

Si noti che Q_1 non è una variabile ma una costante, in quanto dipende da ciò che ha fatto la PE il giorno prima che non può più essere modificato. Per ogni viaggio $v \in V$ che passa per $k \in K(v)$ definiamo le distanze $d_{tvk} = d_{ti_v} + d_{i_v k}$ per arrivare dalla dalla Terra al pianeta k, $d_{vkt} = d_{kj_v} + d_{j_v t}$ per ritornare alla Terra dal pianeta k, e quella totale $d_{vk} = d_{tvk} + d_{vkt}$; analogamente i rispettivi consumi di carburante $c_{tvk} = c\,d_{tvk}$, $c_{vkt} = c\,d_{vkt}$, e $c_{vk} = c\,d_{vk}$. Si osservi che se si parte per il viaggio $v \in V$ passando per k bisogna avere abbastanza carburante per arrivare a k, e che il carburante che la PE aveva nel serbatoio alla partenza del viaggio v meno quello che ha consumato per arrivare a k più il carburante imbarcato in k deve essere sufficiente a coprire il viaggio di ritorno da k alla Terra. Parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto

$$\begin{array}{lll} \min & \ldots & \\ & Q_v \leq T & v \in V \\ & Q_v \geq c_{tvk} y_{vk} & v \in V \ , \ k \in K(v) \\ & Q_{v+1} = Q_v + \sum_{k\in K(v)}[\,C_{vk} - c_{vk} y_{vk}\,] & v \in V \setminus \{\,n\,\} \end{array}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

A	$x_{vk} \in \{\,0\,, 1\,\} \qquad v \in V \ , \ k \in K(v)$	aggiungere
B	$r_v \in \{\,0\,, 1\,\} \quad v \in V$	non aggiungere
C	$\sum_{v\in V} r_v = 1$	non aggiungere
D	$\sum_{k\in K} x_{vk} \geq 1 \quad v \in V$	non aggiungere
E	$\sum_{v\in V} x_{vk} \leq 1 \quad k \in K(v)$	non aggiungere
F	$\sum_{k\in K(v)} y_{vk} = 1 \quad v \in V$	aggiungere
G	$x_{vk} \geq y_{vk} \quad v \in V \ , \ k \in K(v)$	non aggiungere
H	$x_{vk} \leq y_{vk} \quad v \in V \ , \ k \in K(v)$	aggiungere
I	$x_{vk} \leq r_v \quad v \in V \ , \ k \in K(v)$	non aggiungere

$\boxed{\text{J}}$ $\sum_{v \in V} C_{vk} \leq H_k \quad k \in K$ aggiungere

$\boxed{\text{K}}$ $\sum_{k \in K(v)} C_{vk} x_{vk} \leq \sum_{k \in K(v)} H_k \quad v \in V$ non aggiungere

$\boxed{\text{L}}$ $C_{vk} \geq r_v - (1 - x_{vk}) H_k \quad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v)$ non aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $C_{vk} \leq T\, x_{vk} \quad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v)$ aggiungere

$\boxed{\text{N}}$ $Q_v - c_{tvk} y_{vk} + C_{vk} \geq c_{vkt} y_{vk} \quad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v)$ aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ $C_{vk} \geq c\, x_{vk} \quad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v)$ non aggiungere

$\boxed{\text{P}}$ $\sum_{v \in V} \sum_{k \in K(v)} [\, (F_k + \gamma d_{vk}) y_{vk} + G_k x_{vk} + \beta_k C_{vk} \,]$ (funzione obiettivo) aggiungere

$\boxed{\text{Q}}$ $\sum_{v \in V} \sum_{k \in K(v)} [\, \gamma d_{vk} y_{vk} + \beta_k C_{vk} \,]$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{R}}$ $\sum_{v \in V} \sum_{k \in K(v)} [\, (F_k + G_k + \gamma) x_{vk} + \beta_k C_{vk} \,]$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) Si descriva come cambiare la formulazione del problema se il rifornimento del carburante, anziché avvenire come descritto precedentemente, prevedesse $l \in L$ livelli di ricarica U_l del serbatoio tra cui scegliere.

risposta alla domanda b)

C_{vk} diventa una variabile a valori discreti. Per questo occorre definire la famiglia di variabili

$$z_{vkl} = \begin{cases} 1 & \text{se si effettua un rifornimento di livello } l \text{ sul pianeta } k \text{ durante il viaggio } v \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v) \;\; , \;\; l \in L$$

che scelgono (al più) un livello per la ricarica del serbatoio su ogni pianeta k dove si effettua il rifornimento del carburante (oppure nessuno, ossia non si effettua il rifornimento), ed i corrispondenti vincoli

$$C_{vk} = \sum_{l \in L} z_{vkl} U_l \qquad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v)$$

$$\sum_{l \in L} z_{vkl} \leq 1 \qquad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v)$$

$$z_{vkl} \in \{\, 0 \, , \, 1 \,\} \qquad v \in V \;\; , \;\; k \in K(v) \;\; , \;\; l \in L$$

2) L'Ambasciatore Spock (AS) sta affrontando una crisi diplomatica di livello galattico. Senza ottenere il preventivo consenso del Consiglio Scientifico della Federazione, l'Accademia delle Scienze Vulcaniana ha effettuato pericolosi esperimenti di raffinazione del decalitio—rarissimo isotopo del trilitio—arrivando a produrre la Materia Rossa (MR). Sottoposta a forti pressioni e temperature, quali quelle di una stella o del nucleo di un pianeta, la MR è in grado di creare un buco nero; potrebbe quindi essere usata come un'arma devastante in grado di distruggere un pianeta o un intero sistema solare, e la Federazione richiede che tutta la MR prodotta venga trasportata alla nuovissima stazione Deep Space 11 (DS11) nello spazio intergalattico profondo per essere strettissimamente controllata. Purtroppo la MR è anche estremamente instabile e potrebbe innescare un'esplosione iperspaziale con conseguenze devastanti se sottoposta ad un campo di curvatura; pertanto, trasportarla utilizzando i normali vascelli della Flotta Stellare è molto pericoloso. L'AS ha quindi l'idea di sfruttare la rete dei Condotti di Transcurvatura (CT) recentemente sottratta ai Borg grazie al rocambolesco trucco del Capitano (adesso Ammiraglio) Kathryn Janeway. Individua quindi un grafo tripartito $G = (R \cup T \cup S, A)$ i cui nodi rappresentano, rispettivamente, in R i sistemi in cui è stata prodotta la MR, in T i nodi di ingresso alla rete CT, ed in S i principali sistemi stellari abitati. L'AS deve quindi organizzare il trasporto della MR da ciascun nodo $r \in R$ ad uno dei nodi $t \in T$, dopodiché la rete CT la consegnerà senza rischi a DS11 (in realtà esiste un ultimo tratto che deve essere fatto a curvatura dal nodo CT più vicino a DS11 e la stazione, ma è inevitabile e comunque nello spazio intergalattico profondo dove un'esplosione avrebbe conseguenze minori – tranne per l'equipaggio della sfortunata nave). Ciascun arco di tipo $(r, t) \in A$, con $r \in R$ e $t \in T$, ha una probabilità p_{rt} di causare un'esplosione catastrofica di MR durante il trasporto. Per ogni sistema stellare $s \in S$ si conosce la popolazione v_s, e per ogni arco di tipo $(r, t) \in A$ la frazione f^s_{rt} della popolazione di s che verrebbe uccisa se la MR esplodesse durante il tragitto da r a t ($f^s_{rt} = 0$ se s è abbastanza lontano da non essere coinvolto nell'esplosione). L'AS deve quindi organizzare il piano di trasporto della MR in modo da minimizzare il numero atteso di vittime (numero di morti in ogni evento moltiplicato per la probabilità che l'evento si verifichi), considerando però per ogni sistema solamente l'evento con il numero atteso più alto (qualsiasi altro evento porterebbe solo danni incrementali minori ad un sistema già completamente devastato). Per questo sviluppa un modello di *PLI* che comprende le variabili

$$x_{rt} = \begin{cases} 1 & \text{se si effettua il trasporto da } r \text{ a } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (r, t) \in A$$

e la parte della formulazione riportata qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \ & \ldots \\ & \textstyle\sum_{t \in T} x_{rt} = 1 && r \in R \\ & \ldots \\ & x_{rt} \in \{0, 1\} && (r, t) \in A \end{aligned}$$

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

A $x_{ts} \in \{0, 1\} \quad (t, s) \in A$ — non aggiungere

B $x_{rs} \in \{0, 1\} \quad (r, s) \in A$ — non aggiungere

C $x_s \geq 0 \quad s \in S$ — aggiungere

D $\sum_{t \in T} x_{ts} = 1 \quad s \in S$ — non aggiungere

E $\sum_{s \in S} x_{ts} \geq 1 \quad t \in T$ — non aggiungere

F $\sum_{r \in R} x_{rs} \leq 1 \quad s \in S$ — non aggiungere

G $\sum_{s \in S} x_{rs} \geq 1 \quad r \in R$ — non aggiungere

H $x_s \geq f^s_{rt} p_{rt} x_{rt} \quad (r, t) \in A, \ s \in S$ — aggiungere

I $x_s \geq \max\{ f^s_{rt} x_{rt} : (r, t) \in A \} \quad s \in S$ — non aggiungere

J $x_s \geq \max\{ f^s_{rt} p_{rt} x_{rt} : (r, t) \in A \} \quad s \in S$ — non aggiungere

K $x_s \geq f^s_{rt} p_{rt} x_{rt} x_{ts} \quad (r, t) \in A, \ s \in S$ — non aggiungere

$\boxed{\text{L}}$ $x_s \geq f^s_{rt}\, p_{rt}\, x_{rt}\, x_{rs} \quad (\, r \,,\, t \,) \in A \;\;,\;\; s \in S$ non aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $x_s \geq \sum_{(\, r \,,\, t \,) \in A} p_{rt}\, x_{rt} \quad (\, r \,,\, t \,) \in A \;\;,\;\; s \in S$ non aggiungere

$\boxed{\text{N}}$ $\sum_{s \in S} v_s (\sum_{r \in R} \max\{\, p_{rt} \,:\, t \in T \,\}) x_{rs}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ $\sum_{s \in S} v_s (\sum_{t \in T} \max\{\, p_{rt} \,:\, r \in R \,\}) x_{ts}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{P}}$ $\sum_{s \in S} v_s\, x_s$ (funzione obiettivo) aggiungere

$\boxed{\text{Q}}$ $\sum_{s \in S} v_s \max\{\, f^s_{rt}\, p_{rt}\, x_{rt} \,:\, (\, r \,,\, t \,) \in A \,\}$ (funzione obiettivo) non aggiungere

$\boxed{\text{R}}$ $\sum_{s \in S} v_s (\max\{\, f^s_{rt}\, p_{rt} \,:\, (\, r \,,\, t \,) \in A \,\}) x_s$ (funzione obiettivo) non aggiungere

domanda b) Il Capitano James Tiberius Kirk (CJTK) discute con l'AS il problema che un'esplosione iperspaziale nelle vicinanze di un nodo di transcurvatura $t \in T$ potrebbe renderlo inutilizzabile; ciò sarebbe praticamente inevitabile se le esplosioni fossero più di una. Se ciò accadesse per molti di essi verrebbe danneggiata in modo grave un'infrastruttura che si preannuncia critica nella guerra contro i Romulani che tutti ritengono ormai imminente. Il CJTK chiede dunque all'AS di assicurarsi che, per qualsiasi $t \in T$, la probabilità che si verifichino esplosioni contemporaneamente in due qualsiasi dei viaggi ad esso diretti sia minore od uguale di una quantità fissata $p < 1$. Si modifichi il modello precedentemente sviluppato per tenere conto di questa ulteriore richiesta.

risposta alla domanda b)

Si considerino due viaggi $(\, r' \,,\, t \,)$ ed $(\, r'' \,,\, t \,)$ diretti a t da due diversi nodi $r' \in R$ ed $r'' \in R$. La probabilità che avvenga un esplosione in entrambi, assumendo (come è ragionevole fare) che gli eventi siano indipendenti, è il prodotto $p_{r't}\, p_{r''t}$. Il CJTK richiede dunque che non venga effettuata nessuna coppia di viaggi per cui $p_{r't}\, p_{r''t} > p$. Sia quindi, per ogni $t \in T$, $I(\, t \,) = \{\, \{\, r' \,,\, r'' \,\} \in R \times R \,:\, p_{r't}\, p_{r''t} > p \,\}$, l'insieme delle coppie (non ordinate) dei viaggi incompatibili verso quel nodo: è allora sufficiente aggiungere il gruppo di vincoli

$$x_{r't} + x_{r''t} \leq 1 \qquad\qquad t \in T \;\;,\;\; \{\, r' \,,\, r'' \,\} \in I(\, t \,)$$

che assicurano che non vengano effettuati entrambi.