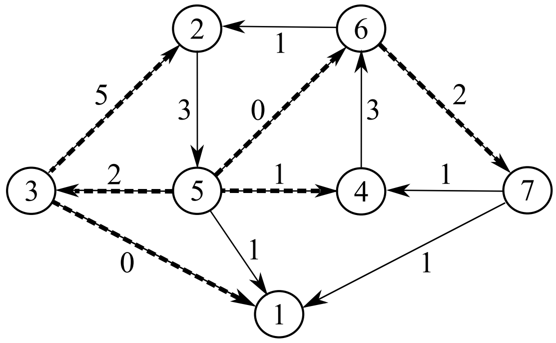
1) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 5 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(5\,,\,4)$ con l'arco $(7\,,\,4)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [\,2\,,\,7\,,\,2\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,2\,]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 10

B Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(5\,,\,1)\,,\,(2\,,\,5)\}$ II $\{(6\,,\,2)\,,\,(7\,,\,1)\}$ III $\{(6\,,\,2)\,,\,(5\,,\,1)\}$

C Quali archi bisogna sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(3\,,\,2)$, $(5\,,\,4)$ con $(6\,,\,2)$, $(7\,,\,4)$

II $(3\,,\,2)$, $(3\,,\,1)$ con $(6\,,\,2)$, $(5\,,\,1)$

III entrambe le precendenti sono corrette

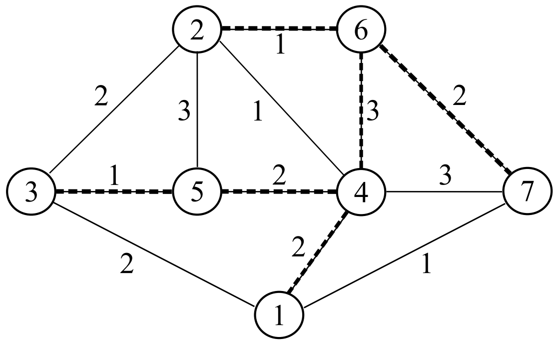
D Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 7 II 10 III 14

E Modificare il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi, mantenendo i costi non negativi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte, basta modificare tra gli archi dell'albero $c_{53} \leq 1$ e $c_{32} \leq 0$, oppure tra gli archi fuori dall'albero $c_{62} \geq 7$ e $c_{51} \geq 2$.

2) Per il problema del dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{1\,,\,4\}$ con il lato $\{1\,,\,3\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esiste esattamente un altro albero di copertura che ha lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quali lati non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno   II $\{1\,,\,4\}$, $\{4\,,\,6\}$ e $\{6\,,\,7\}$ III $\{1\,,\,4\}$, $\{4\,,\,6\}$ e $\{1\,,\,7\}$

C Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1\,,\,7\}$, $\{2\,,\,3\}$ e $\{2\,,\,4\}$ II $\{1\,,\,7\}$ III $\{2\,,\,3\}$ e $\{2\,,\,4\}$

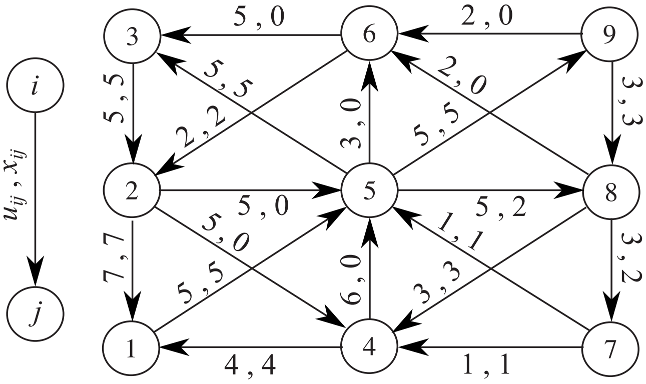
D Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I 11   II 8   III 6

E Modificare il costo del minor numero possibile di lati fuori dall'albero affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{1\,,\,3\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero. Giustificare la risposta.

Risposta: Le condizioni $c_{17} \geq 3$, $c_{23} \geq 3$ e $c_{24} \geq 3$ garantisce che qualsiasi lato $\{i\,,\,j\}$ dell'albero abbia costo maggiore di tutti gli altri lati del ciclo che si viene a formate quando $\{i\,,\,j\}$ viene aggiunto all'albero (condizione di ottimalità per cicli), il che implica che l'albero è una soluzione ottima del problema. Scambiando il lato $\{1\,,\,3\}$ con un altro lato dell'albero, si possono ottenere altri 2 alberi di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{1\,,\,3\}$ sono presenti un altri 2 lati, $\{1\,,\,4\}$ e $\{4\,,\,5\}$, di costo 2.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 5 al nodo 1 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 6 II ammissibile di valore 11 III non ammissibile

B Ponendo $x_{96} = 2$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 6 II ammissibile di valore 11 III non ammissibile

C Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $9 \to 5 \to 1$ II $5 \to 1$ III entrambi

D Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 11:

I $N_t = \{1, 2, 4\}$ II $N_s = \{5, 9\}$ III entrambi

E Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) è saturo:

I $N_t = \{1\}$ II $N_t = \{1, 2, 4\}$ III nessuno dei due

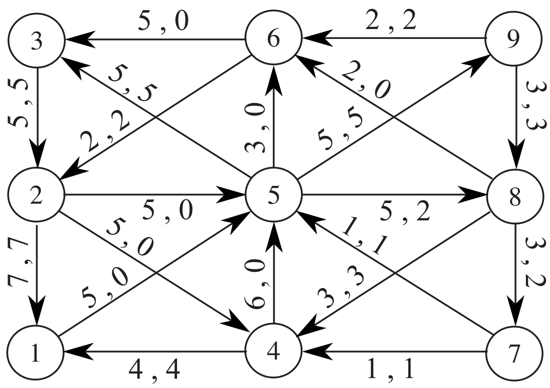
F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:

I 1 II 2 III 3

G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:

I $N_t = \{1, 2, 4\}$ II $N_t = \{1\}$ III entrambi

H Si discuta quale sia il minimo numero di archi dei quali è necessario aumentare la capacità affinché il valore del flusso massimo aumenti strettamente. Giustificare la risposta.

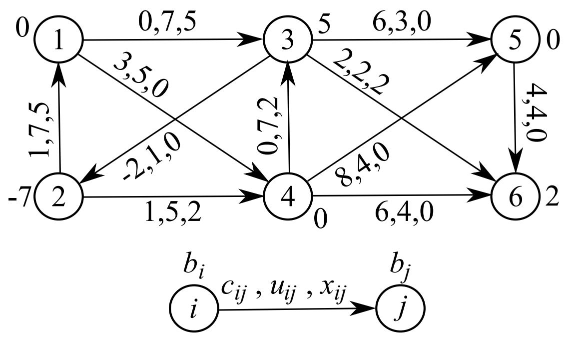


Risposta: Il flusso ottimo, di valore $v = 11$, è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso dato, reso ammissibile di valore 6 ponendo $x_{96} = 0$ (si veda $\boxed{\text{B}}$), inviando cinque unità di flusso lungo il cammino (arco) $5 \to 1$, che è aumentante (si veda $\boxed{\text{C}}$). Ciò richiede un'iterazione, ma l'algoritmo deve eseguire anche una seconda visita del grafo residuo (si veda $\boxed{\text{F}}$), che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio $T = (N_s, N_t)$, con $N_t = \{1, 2, 4\}$ (si veda $\boxed{\text{G}}$), di capacità

$$u(N_s, N_t) = u_{32} + u_{62} + u_{74} + u_{87} = 5 + 2 + 3 + 1 = 11,$$

che è saturo e quindi è il taglio di capacità minima. Questo non è l'unico taglio di capacità minima: infatti, anche $T' = (N'_s, N'_t)$ con $N'_t = \{1\}$ è saturo ed ha capacità 11. Si noti che la risposta ad $\boxed{\text{E}}$ è negativa in quanto nel flusso dato l'arco $(1, 5)$, inverso nei tagli, non è vuoto prima dell'esecuzione dell'algoritmo. Poiché gli insiemi degli archi dei tagli T e T' sono disgiunti, non è possibile aumentare il valore di tutti i tagli di capacità minima aumentando solamente la capacità di un arco; pertanto il numero minimo è due. Infatti, aumentando ad esempio la capacità sia di $(6, 2)$ (appartenente a T) che di $(2, 1)$ (appartenente a T') si crea il cammino aumentante $5 \to 6 \to 2 \to 1$ che permette di aumentare il valore del flusso.

4) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[\,0\,,\,-7\,,\,5\,,\,0\,,\,0\,,\,2\,]$ II $[\,0\,,\,7\,,\,-5\,,\,0\,,\,0\,,\,-2\,]$ III $[\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 11 II 14 III 8

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 2 \to 1$ II $3 \to 5 \to 6 \to 4 \to 3$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6$ II $6 \to 3 \to 2 \to 1$ III entrambi

E Quali dei seguenti cicli hanno costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 2$ II $3 \to 2 \to 1 \to 3$ III nessuno dei due

F Quali dei seguenti cammini hanno costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $5 \to 6 \to 3 \to 2$ II $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 6$ III nessuno dei due

G Si dica se lo pseudoflusso è oppure no minimale, ed altrimenti si indichi come costruirne uno modificando il flusso su un arco in modo da aumentare il meno possibile lo sbilanciamento complessivo del grafo. Una volta individuato lo pseudoflusso minimale si esegua a partire da esso l'algoritmo dei cammini minimi successivi, mostrando le iterazioni mostrate e dimostrando che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso non è minimale in quanto esiste il ciclo $1 \to 3 \to 2 \to 1$ che è aumentante (si veda C) e di costo negativo (si veda E); in altri termini sul grafo residuo esiste un corrispondente ciclo orientato di costo negativo e quindi non esiste un albero dei cammini minimi. Lo pseudoflusso ha già vettore di sbilanciamenti tutto nullo (si veda la prima domanda) e quindi è già un flusso ammissibile. Per renderlo minimale occorre "cancellare" il ciclo dato, ossia rendere uno degli archi vuoto o saturo: la scelta che minimizza lo sbilanciamento complessivo è quella di saturare l'arco $(\,3\,,\,2\,)$, ottenendo lo pseudoflusso x' (mostrato in basso, a sinistra, con i relativi sbilanciamenti) uguale ad x tranne per $x_{32} = 1$, e quindi con $e_{x'}(\,2\,) = 1$ e $e_{x'}(\,3\,) = -1$, ossia uno sbilanciamento complessivo pari ad 1: tutte le altre scelte richiedono di "spostare" almeno due unità di flusso.

Lo pseudoflusso corrispondente è minimale, come si può verificare calcolando un albero dei cammini minimi sul grafo residuo rispetto a x' con insieme di radici $O_{x'} = \{\,2\,\}$, quale quello mostrato sotto a destra (archi tratteggiati) con le rispettive etichette (si noti che non è unico in quanto alcuni archi fuori dall'albero rispettano le condizioni di Bellman all'uguaglianza). L'albero individua quindi il cammino minimo $2 \to 1 \to 3$ tra l'unico nodo in $O_{x'}$ (2) e l'unico nodo in $D_{x'}$ (3), con capacità pari a 2. È quindi possibile inviare un'unità di flusso (visto che la capacità del cammino, pari a due, è superiore allo sbilanciamento del nodo origine del cammino, pari ad 1) lungo quel cammino, ottenendo un nuovo pseudoflusso x'' uguale ad x' tranne per $x''_{21} = x''_{13} = 6$; x'' ha vettore degli sbilanciamenti tutti nulli e pertanto è un flusso ammissibile. È noto dalla teoria che x'' è necessariamente minimale; ciò è facile da verificare in quanto il grafo residuo rispetto ad x'' è lo stesso di quello rispetto ad x', e quindi quello mostrato sotto è ancora un albero dei cammini minimi. Essendo x'' sia un flusso ammissibile che minimale esso è un flusso di costo minimo.