1) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto ed il corrispondente problema duale (D).

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I la soluzione $x = [\,1\,,\,1\,]$ è primale non degenere

II la soluzione $x = [\,0\,,\,1\,]$ è ottima per il primale

III nessuna delle precedenti è corretta

B Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I non esiste alcuna soluzione duale ammissibile complementare a $x = [\,1\,,\,1\,]$

II esiste una soluzione duale ammissibile complementare a $x = [\,1\,,\,-1\,]$

III nessuna delle precedenti è corretta

C Per quale famiglia di coppie di valori di α e β la soluzione $x = [\,1\,,\,0\,]$ è ottima per (P)?

I $\alpha = \beta = 0$ II nessuna III $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

D Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti direzioni è di crescita per (P)?

I $\xi = [\,1\,,\,-1\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precedenti

E Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I esiste una soluzione ottima primale non degenere

II esiste una soluzione ottima primale degenere

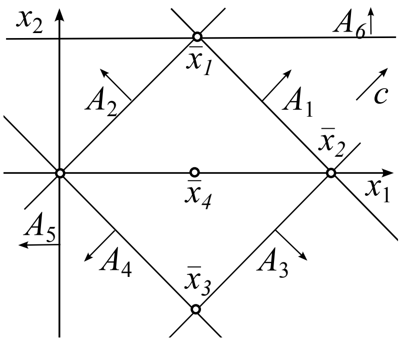
III entrambe le precedenti sono corrette

F Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti direzioni è ammissibile per $x = [\,1\,,\,1\,]$ e di crescita?

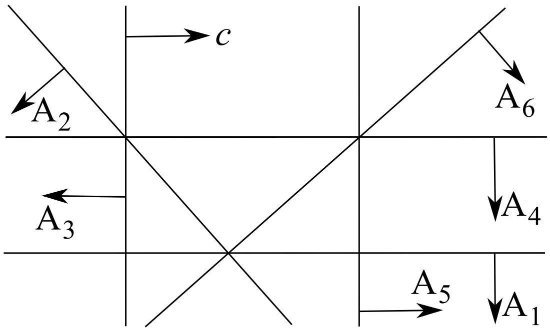
I $\xi = [\,1\,,\,-1\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precendenti

G Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)? Giustificare la risposta.

Risposta: Possiamo risolvere il questito per via grafica, osservando che la funzione obiettivo è parallela al vincolo $x_1 + x_2 \leq 2$ e la direzione lungo la quale cresce è data dal vettore dei coefficienti della funzione obiettivo stessa, cioè $[\,1\,,\,1\,]$. L'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime è rappresentato dal segmento di estremi $\bar{x}_1 = [\,1\,,\,1\,]$ e $\bar{x}_2 = [\,2\,,\,0\,]$ definito da $\{\,[\,2-t\,,\,t\,],\ t \in [0,1]\,\}$. Osserviamo inoltre che l'ottimalità di $\bar{x}_1 = [\,1\,,\,1\,]$ implica, in conseguenza del teorema degli scarti complemenati, che esiste una soluzione duale ammissibile complementare, mentre $\bar{x}_3 = [\,1\,,\,-1\,]$ non è una soluzione ottima e pertanto non esiste una soluzione duale ammissibile complementare (si veda B). La soluzione $\bar{x}_1$ è degenere, in quanto in $\bar{x}_1$ sono attivi il primo, il secondo e il sesto vincolo, mentre nella soluzione ottima $\bar{x}_2$ sono attivi il primo e il terzo vincolo, pertanto è non degenere (si veda E). Infine $\bar{x}_4 = [\,1\,,\,0\,]$ è strettamente interno al poliedro, quindi la condizione affinché sia una soluzione ottima è che la funzione obiettivo sia identicamente nulla in modo tale che ogni soluzione ammissibile sia anche ottima (si veda C). Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, la funzione obiettivo è parallela al vincolo $x_2 \leq 1$, la soluzione ottima è $\bar{x}_1$ e quindi non esistono direzioni ammissibili per $\bar{x}_1$ e di crescita (si veda F).



2) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c, A_3, ed A_5 sono collineari (non tutti con lo stesso verso) ed ortogonali ad A_1 ed A_4, che sono quindi collineari tra loro.



A) Per $B = \{\,1\,,\,2\,\}$ si può affermare che

- I) è una base primale ammissibile
- II) è una base primale degenere
- III) entrambe le cose sono vere

B) Per $B = \{\,4\,,\,6\,\}$ si può affermare che

- I) è una base primale ammissibile
- II) è una base duale ammissibile
- III) non è una base

C) Per $B = \{\,3\,,\,5\,\}$ si può affermare che

- I) è una base duale ammissibile
- II) è una base duale degenere
- III) non è una base

D) Se la base corrente è $B = \{\,2\,,\,3\,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 3$ è

- I) ammissibile
- II) di crescita
- III) entrambe le cose sono vere

E) Se la base corrente è $B = \{\,2\,,\,4\,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 2$ è

- I) ammissibile
- II) di crescita
- III) entrambe le cose sono vere

F) Se la base corrente è $B = \{\,2\,,\,4\,\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 4$ è

- I) ammissibile
- II) di crescita
- III) nessuna delle due cose è vera

G) Se la base corrente è $B = \{\,4\,,\,5\,\}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è

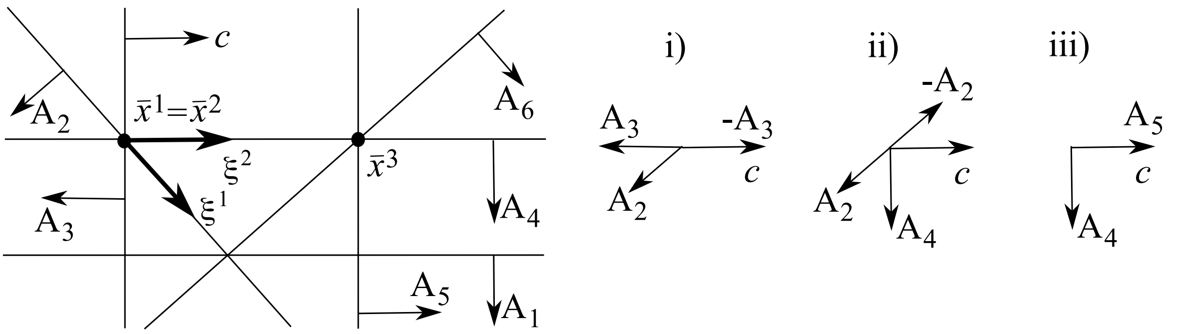
- I) $h = 4$
- II) $h = 5$
- III) nessuno (l'algoritmo termina)

H) Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\,2\,,\,3\,\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Risposta: La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 2 e 3). B è primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti $c \in cono(\{\,-A_2\,,\,A_3\,\})$, o meglio $c \in cono(\{\,-A_3\,\})$ essendo collineare con A_3 e di verso opposto, come mostrato in i). Pertanto $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_3 < 0$, $h = 3$ e si determina la direzione ξ^1 mostrata in figura (interna alla frontiera del vincolo 2, che rimane in base, e si allontana dalla frontiera del vincolo 3, che uscirà dalla base, avendo con A_3 prodotto scalare negativo). La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) ma non ammissibile (si veda $\boxed{\text{D}}$): infatti ha prodotto scalare positivo (forma un angolo minore di 90 gradi) con A_4, che è attivo ma non in base. Ovviamente questo sarà il vincolo che determina il massimo passo lungo ξ^1 (nullo), e pertanto l'algoritmo seleziona $k = 4$ compiendo un'iterazione degenere in cui si cambia la base ma non il vertice.

Alla seconda iterazione si ha quindi $B = \{\,2\,,\,4\,\}$ con $\bar{x}^2 = \bar{x}^1$. B non è duale ammissibile: infatti $c \in cono(\{\,-A_2\,,\,A_4\,\})$, come mostrato in ii), e quindi $\bar{y}_2 < 0$ e $\bar{y}_4 > 0$. Pertanto $h = 2$ e si determina la direzione ξ^2 mostrata (interna alla frontiera del vincolo 4, che rimane in base, e si allontana dalla frontiera del vincolo 2, che uscirà dalla base, avendo con A_2 prodotto scalare negativo). ξ^2 ha prodotto scalare positivo con A_5 ed A_6 (si veda $\boxed{\text{E}}$), ed ovviamente il massimo passo lungo ξ^2 che può essere fatto senza violare i vincoli è lo stesso ($\lambda_5 = \lambda_6$); pertanto, per la regola anticiclo di Bland si ha $k = 5$.

Alla terza iterazione la base è quindi $B = \{\,4\,,\,5\,\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^3$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 4 e 5. La base è duale ammissibile, infatti $c \in cono(\{\,A_4\,,\,A_5\,\})$, come mostrato in iii), ed in effetti $c \in cono(\{\,A_5\,\})$ essendo collineare con A_5 (con lo stesso verso): pertanto $\bar{y}_5 > 0$ e $\bar{y}_4 = 0$ e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale (si veda $\boxed{\text{G}}$).



3) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, al problema di PL dato qui accanto.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 4x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & -2x_1 & - & x_2 & \leq & -7 \\ & & - & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

A Per $B = \{\, 1\,,\, 4 \,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile — II è una base duale ammissibile — III nessuna delle due cose

B Per $B = \{\, 1\,,\, 4 \,\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere — II è una base duale degenere — III nessuna delle due cose

C Per $B = \{\, 2\,,\, 3 \,\}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile — II è una base duale degenere — III entrambe le cose sono vere

D Per $B = \{\, 3\,,\, 5 \,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile — II è una base primale degenere — III non è una base

E Se la base corrente è $B = \{\, 4\,,\, 5 \,\}$, l'indice uscente determinato dall'algoritmo è

I $h = 4$ — II $h = 5$ — III nessuno (l'algoritmo termina)

F Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\, 4\,,\, 5 \,\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte. Si dimostri in particolare la correttezza della conclusione a cui giunge l'algoritmo.

Risposta: Per $B = \{\, 4\,,\, 5 \,\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{y}_B = c A_B^{-1} = [\, 4\,,\, 2 \,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, 4\,,\, 2 \,] \quad , \quad \bar{y} = [\, \bar{y}_B\,,\, 0 \,] = [\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 4\,,\, 2 \,]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = b_N \ , \ k = \min\{\, i \in N \ : \ A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{\, 2 \,\} = 2$$

$$\eta_B = [\, -2\,,\, -1 \,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, -2\,,\, -1 \,]$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, l'algoritmo termina dichiarando che il duale è inferiormente illimitato e quindi il primale è vuoto. Tale conclusione è giustificata considerando la direzione duale

$$d = [\, 0\,,\, 1\,,\, 0\,,\, 2\,,\, 1 \,]$$

ossia avente $d_i = -\eta_i$ per $i \in B$, $d_k = 1$, e $d_i = 0$ per tutti gli altri indici. È immediato verificare che d è di decrescita, infatti

$$db = 0(-3) + 1(-7) + 0(-1) + 2(2) + 1(2) = -1 < 0\ .$$

Inoltre, vale che

$$dA = [\, 0\,,\, 1\,,\, 0\,,\, 2\,,\, 1 \,] \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\ .$$

Infine, $d \geq 0$. Pertanto, tutte le soluzioni duali

$$y(\,\theta\,) = \bar{y} + \theta d = [\, 0\,,\, \theta\,,\, 0\,,\, 4 + 2\theta\,,\, 2 + \theta \,]$$

sono duali ammissibili ($y(\,\theta\,)A = (\bar{y} + \theta d)A = \bar{y}A = c$, $y(\,\theta\,) \geq 0$) per ogni $\theta \geq 0$, ed il loro costo decresce con θ in quanto

$$y(\,\theta\,)b = \bar{y} + \theta(db) = 12 - \theta\ ,$$

mostrando così senza ombra di dubbio che il duale è inferiormente illimitato.

4) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

$$\begin{array}{lllllllll} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & \leq 10 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1, x_4, x_2, x_3\}$ II $\{x_4, x_2, x_1, x_3\}$ III $\{x_3, x_4, x_2, x_1\}$

B Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $[1, 0, 0, 1]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo non cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 8

III nessuna delle precedenti è corretta

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 6$ II $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 11/2$ III $\underline{z} = 11/2$, $\bar{z} = 6$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_2, x_3, x_4 II x_2, x_3 III x_2, x_4

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 5$, $\bar{z} = 21/4$ II $z = 5$, $\bar{z} = 6$ III $z = 5$, $\bar{z} = 11/2$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo e ottenute risolvendo il rilassamento?

I nessuna II $[1, 0, 0, 1]$, $[1, 0, 1, 0]$ III $[1, 0, 0, 1]$, $[1, 1, 0, 0]$, $[0, 1, 1, 0]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per ottimalità

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude due nodi per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H È possibile modificare il peso del terzo oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.

Risposta: È possibile porre il peso del terzo oggetto a 2: in questo caso si ottengono gli ordinamenti $\{x_1, x_4, x_3, x_2\}$ oppure $\{x_1, x_3, x_4, x_2\}$ (poiché il terzo ed il quarto oggetto hanno rendimento uguale pari a $1/2$ e quindi possono apparire in qualsiasi ordine). In entrambi i casi, comunque, si ottiene come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 0, 1, 1]$ in quanto la somma dei pesi degli oggetti presi è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Poiché è la soluzione ottima del rilassamento continuo, il suo valore di funzione obiettivo $\bar{z} = cx = 6$ è una valutazione superiore sull'ottimo del problema. Ma poiché è intera, il suo valore di funzione obiettivo $cx = 6$ è anche una valutazione inferiore sull'ottimo del problema, il che porta a porre il valore dell'"incumbent" $z = 6$. Da da ció discende che è una soluzione ottima e l'algoritmo termina al nodo radice in quanto si ottiene immediatamente $\bar{z} \leq z$ e non è necessario procedere col branching.