1) Perry Rhodan (PR), "l'erede all'universo", ha salvato la Terra dall'ingerenza del temibile impero Arkonide, governato dal Reggente Robotico (RR)—un enorme cervello positronico—fingendone con astuzia la distruzione da parte degli Springer. Sono passati oltre 50 anni e l'umanità, avendo sviluppato un governo mondiale ed una flotta stellare, potrebbe ormai essere pronta a riprendere i contatti, ma PR cerca comunque di rimandare il più possibile quel momento. Deve però assolutamente fare qualcosa per salvare l'amata moglie, la bellissima ed orgogliosa Arkonide Thora che ha trovato sulla Luna, nella prima missione lunare della storia umana, arenata con la sua astronave per la decadenza e l'imperizia dell'equipaggio. Thora sta morendo, mentre PR è virtualmente immortale per via dell trattamento ringiovanente donatogli da Esso, l'entità di inconcepibile intelligenza e potere che vive sul pianeta artificiale Errante (Wanderer) che PR ha trovato mediante un'avventurosa ricerca tra lo spazio ed il tempo. Poiché gli Arkonidi non possono ricevere il trattamento (Esso l'ha già concesso ad uno di loro, Atlan, molti millenni prima) PR deve affidarsi ai metodi degli Ara, gli infidi medici dell'impero Arkonide. Per questo deve raggiungere il pianeta-zoo Tolimon che orbita intorno alla stella di Revnur, dove in gran segreto gli Ara stanno sviluppando un siero di lunga vita; ma vuole farlo senza lasciare tracce che riconducano alla Terra. Ogni salto nell'iperspazio pentadimensionale, infatti, può essere immediatamente percepito in ogni punto dello spazio, e quindi in particolare da tutte le stazioni di monitoraggio M che il RR ha disseminato per la Galassia. PR dispone di una tecnologia (rubata agli stessi Springer) che attenua e confonde le tracce di ogni salto, ma non è perfetta. Con l'aiuto del Grande Cervello Positronico della base su Venere (GCPV) (un'installazione Arkonide vecchia di migliaia di anni), PR prepara una mappa della Galassia sotto forma di un grafo orientato (N, A), in cui il nodo $t \in N$ rappresenta la Terra mentre $t' \in N$ rappresenta Tolimon, e gli archi rappresentano i possibili salti iperspaziali tra due diversi sistemi stellari. Le stazioni di monitoraggio sono predisposte per captare coppie di salti iperspaziali e identificarle come provenienti dalla stessa astronave. PR può stimare la probabilità p^m_{ijh} (piccola, ma non nulla) che la coppia di salti consecutivi $(i, j) \in A$ e $(j, h) \in A$ siano identificati dalla stazione $m \in M$; se ciò accadesse per tutto il cammino iperspaziale seguito il RR potrebbe risalire alla posizione della Terra. PR chiede quindi al GCPV di determinare il cammino tra t e t' che ha la minima probabilità di poter essere completamente seguito, ossia che tutte le coppie consecutive di salti siano identificati dalla stessa stazione $m \in M$. Nel far questo però occorre anche tenere conto della lunghezza l_{ij} (in Megaparsec) di ogni salto, e dell'autonomia complessiva L dell'astronave speciale "Koos-Nor" che PR userà. Aiutate l'erede all'universo a salvare la sua amata e continuare la sua interminabile avventura (oltre 100 romanzi) scrivendo il corrispondente modello matematico.

Definiamo l'insieme $C = \{ (i, j, h) : (i, j) \in A \text{ e } (j, h) \in A \}$ delle triple corrispondenti a tutte le possibili coppie di salti consecutivi, e le famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se viene effettuato il salto tra } i \text{ e } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i, j) \in A$$

Si ricordi che la probabilità dell'accadimento di un insieme di eventi indipendenti (tali sono considerati l'identificazione delle coppie di salti) è pari al prodotto delle probabilità dell'accadimento di ciascuno di essi. Parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto

$$\begin{aligned} \min \quad & \ldots \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = t \\ 1 & \text{se } i = t' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N \\ & \ldots \end{aligned}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

A $\quad y_{ijh} \in \{0, 1\} \qquad (i, j, h) \in C$ — aggiungere

B $\quad p \in \mathbb{R}$ — aggiungere

C $\quad y_{ijh} \geq x_{ij} \;,\; y_{ijh} \geq x_{jh} \qquad (i, j, h) \in C$ — non aggiungere

D $\quad y_{ijh} \geq x_{ij} + x_{jh} - 1 \qquad (i, j, h) \in C$ — aggiungere

E $\quad y_{ijh} = x_{ij} x_{jh} \qquad (i, j, h) \in C$ — non aggiungere

F $\quad y_{ijh} \leq x_{ij} + x_{jh} \qquad (i, j, h) \in C$ — non aggiungere

G $\quad p \geq \prod_{(i,j,h) \in C \,:\, y_{ijh} = 1} p^m_{ijh} \qquad m \in M$ — non aggiungere

H $\quad p \geq \sum_{(i,j,h) \in C} \log(p^m_{ijh}) y_{ijh} \qquad m \in M$ — aggiungere

$\boxed{\text{I}}$ $p \geq \sum_{(i,j,h) \in C \,:\, x_{ij}=1 \& x_{jh}=1} \log(p^m_{ijh}) \qquad m \in M$ — non aggiungere

$\boxed{\text{J}}$ $\sum_{(i,j,h) \in C} (l_{ij} + l_{jh}) y_{ijh} \leq 2L$ — non aggiungere

$\boxed{\text{K}}$ $\sum_{(i,j) \in A} l_{ij} x_{ij} \leq L$ — aggiungere

$\boxed{\text{L}}$ $\sum_{(i,j) \in A} (l_{ij} p^m_{ijh}) x_{ij} \leq Lp \qquad m \in M$ — non aggiungere

$\boxed{\text{M}}$ $\max_{m \in M} \prod_{(i,j,h) \in C} p^m_{ijh} y_{ijh}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

$\boxed{\text{N}}$ $\sum_{m \in M} \prod_{(i,j,h) \in C} p^m_{ijh} y_{ijh}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

$\boxed{\text{O}}$ p (funzione obiettivo) — aggiungere

$\boxed{\text{P}}$ $\sum_{m \in M} \sum_{(i,j,h) \in C} p^m_{ijh} y_{ijh}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

domanda b) Per diminuire ulteriormente il rischio che la Terra venga identificata, PR decide di spedire il suo miglior alleato Pucky, il topo-castoro del pianeta Vagabondo (Vagabond) che è sia telepata che telecinetico che teletrasportatore, a sabotare una delle stazioni di ascolto in M in modo che non possa sicuramente identificare la Koos-Nor. Si modifichi il modello in modo tale che identifichi in modo ottimo anche la stazione che Pucky andrà ad incapacitare.

risposta alla domanda b) Per questo occorre definire la famiglia di variabili binarie

$$z_m = \begin{cases} 1 & \text{se Pucky sabota la stazione } m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad m \in M$$

con l'ovvio vincolo

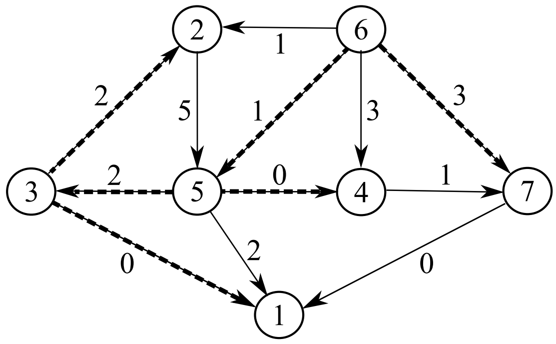
$$\sum_{m \in M} z_m = 1$$

A questo punto occorre modificare i vincoli di $\boxed{\text{H}}$ come

$$p \geq \sum_{(i,j,h) \in C} \log(p^m_{ijh}) y_{ijh} - P z_h \qquad m \in M$$

in modo da "inattivare" quello della stazione sabotata; per questo P deve essere scelto come una costante abbastanza grande, ad esempio $P = \sum_{(i,j,h) \in C} \log(p^m_{ijh})$.

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 6 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(3, 1)$ con l'arco $(5, 1)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [3, 1, 3, 3, 1, 0, 3]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 8

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire una buona numerazione che lo dimostra.

I No II Si: $[5, 2, 4, 1, 3, 7, 6]$ III Si: $[6, 4, 2, 5, 1, 3, 7]$

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(6, 2), (5, 1)\}$ II $\{(6, 2), (4, 7)\}$ III $\{(5, 1), (7, 1)\}$

D Quali archi bisogna sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(6, 7)$ con $(7, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 7)$

II $(3, 2)$, $(6, 7)$ con $(6, 2)$, $(4, 7)$

III entrambe le precendenti sono corrette

E Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

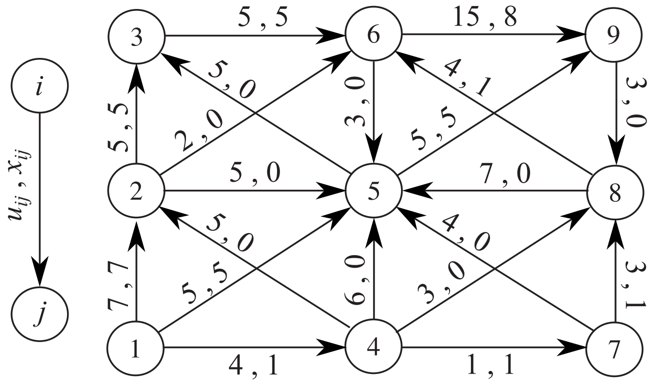
I 8 II 10 III 12

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato, mantenendo i costi degli archi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato, mantenendo i costi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: Il vettore di etichette relative all'albero in figura è $d = [3, 5, 3, 1, 1, 0, 3]$. L'albero dato risulta l'unico albero dei cammini minimi se tutte le condizioni di Bellman sono soddisfatte in modo stretto: basta modificare tra gli archi fuori dall'albero $c_{62} > 5$ e $c_{47} > 2$, infatti in questo modo risulta $5 = d[2] < (0 = d[6]) + c_{62}$ e $3 = d[7] < (1 = d[4]) + c_{47}$.

Con un ragionamento analogo, dobbiamo fare in modo di cambiare i costi degli archi dell'allbero affinché tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte (ma non necessariamente in modo stretto, poiché non è richiesta unicità). Ciò è garantito se $c_{67} \in [1, 2]$ e $c_{53} = c_{32} = 0$. In tal caso il vettore di etichette diventa $d = [1, 1, 1, 1, 1, 0, c_{67}]$ che verifica le condizioni di Bellman se $c_{67} \in [1, 2]$.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 9 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 11 II ammissibile di valore 13 III non ammissibile

B Ponendo $x_{26} = 2$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 11 II ammissibile di valore 13 III non ammissibile

C Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $1 \to 4 \to 8 \to 6 \to 9$ II $1 \to 4 \to 2 \to 6 \to 9$ III entrambi

D Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, la capacità del cammino $1 \to 4 \to 2 \to 6 \to 9$ è:

I 3 II 2 III 0

E Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 18:

I $N_t = \{6, 9\}$ II $N_s = \{1\}$ III entrambi

F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:

I 1 II 2 III 3

G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:

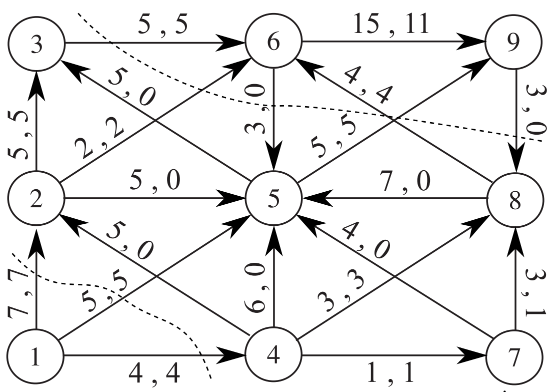
I $N_s = \{1, 2, 4\}$ II $N_t = \{6, 9\}$ III nessuno dei due

H Si discuta quale sia il minimo numero di archi dei quali è necessario aumentare la capacità affinché il valore del flusso massimo aumenti strettamente. Giustificare la risposta.

Risposta: Il flusso ottimo, di valore $v = 16$, è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso dato, reso ammissibile di valore 13 ponendo $x_{26} = 2$ (si veda $\boxed{\text{B}}$), inviando tre unità di flusso lungo il cammino $1 \to 4 \to 8 \to 6 \to 9$, che è aumentante e di capacità, appunto, tre (si veda $\boxed{\text{C}}$). Ciò richiede un'iterazione, ma l'algoritmo deve eseguire anche una seconda visita del grafo residuo (si veda $\boxed{\text{F}}$), che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio $T = (N_s, N_t)$, con $N_s = \{1\}$ (si veda $\boxed{\text{G}}$), di capacità

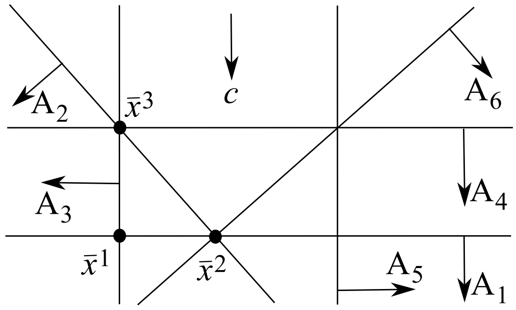
$$u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} + u_{15} = 7 + 4 + 5 = 16,$$

che è saturo e quindi è il taglio di capacità minima.



Questo non è l'unico taglio di capacità minima: infatti, anche $T' = (N'_s, N'_t)$ con $N'_t = \{6, 9\}$ è saturo ed ha capacità 16 (si veda $\boxed{\text{E}}$). Poiché gli insiemi degli archi dei tagli T e T' sono disgiunti, non è possibile aumentare il valore di tutti i tagli di capacità minima aumentando solamente la capacità di un arco; pertanto il numero minimo è due. Infatti, aumentando ad esempio la capacità sia di $(1, 5)$ (appartenente a T) che di $(5, 9)$ (appartenente a T') si crea il cammino aumentante $1 \to 5 \to 9$ che permette di aumentare il valore del flusso.

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c, A_1 ed A_4 sono collineari tra loro, ed anche A_3 ed A_5 lo sono.



A Per $B = \{ 2 , 3 \}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile   II è una base duale ammissibile   III entrambe le cose

B Per $B = \{ 1 , 3 \}$ si può afferare che

I è una base duale ammissibile   II è una base duale degenere   III entrambe le cose

C Per $B = \{ 1 , 2 \}$ si può afferare che

I è una base primale degenere   II è una base duale degenere   III entrambe le cose

D Per $B = \{ 1 , 3 \}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

E Per $B = \{ 1 , 3 \}$, dato l'indice entrante stabilito alla domanda precedente, l'indice uscente è

I $h = 1$ II $h = 3$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Per $B = \{ 4 , 6 \}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G L'insieme delle soluzioni ottime del problema duale:

I contiene una sola soluzione   II contiene infinite soluzioni   III è vuoto

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{ 1 , 3 \}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte. Al termine, nel caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primale e duale ottenute. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{ 1 , 3 \}$, La soluzione primale di base $\bar{x}^1$, mostrata direttamente in figura sopra, viola i vincoli 2 e 4: pertanto $k = 2$ per la regola anticiclo di Bland (si veda $\boxed{\text{D}}$). Poiché $A_2 \in cono(A_1 , A_3)$, come mostrato in (a) sotto, si ha $\eta_1 > 0$ ed $\eta_3 > 0$. Poiché c è collineare ad A_1, si ha che $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_3 = 0$: pertanto, $\bar{y}_1/\eta_1 > 0 = \bar{y}_3/\eta_3$, da cui $h = 3$ (si veda $\boxed{\text{E}}$). In alternativa si può notare che $c \in cono(A_1 , A_2)$ ma $c \notin cono(A_2 , A_3)$, e quindi non sarebbe mai potuto essere $h = 1$.

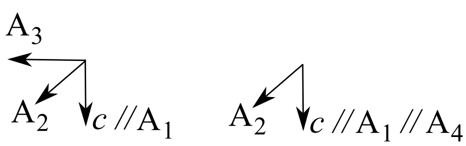
Alla seconda iterazione, quindi, $B = \{ 1 , 2 \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 4, come mostrato in figura, quindi $k = 4$. Come mostrato in (b), A_4 è collineare con A_1 e c: pertanto, $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 = 0$, ed anche $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 = 0$. L'unico indice $i \in B$ per cui $\eta_i > 0$ è $i = 1$, e pertanto $h = 1$.

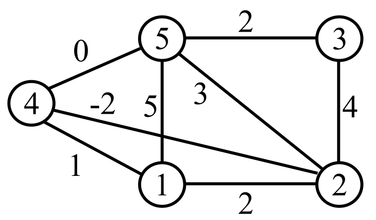
Alla terza iterazione, quindi, $B = \{ 2 , 4 \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^3$ non viola alcun vincolo, come mostra la figura, quindi l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale.

Per discutere l'unicità di $\bar{x}_3$ occorrere esaminare la degenerazione della soluzione duale di base; si ha che $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto c è collineare con A_4 (si veda ancora (b)), quindi la base è duale degenere. Pertanto $\bar{x}^3$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima. È infatti immediato verificare che questo è il caso: tutto il segmento di estremi $\bar{x}^3$ ed il vertice corrispondente (ad esempio) alla base $\{ 4 , 6 \}$ è ammissibile ed è formato da soluzioni aventi lo stesso valore di funzione obiettivo di $\bar{x}^3$.

Poiché la base è anche primale degenere anche la soluzione duale potrebbe non essere unica, ma così non è (si veda $\boxed{\text{G}}$). Infatti, si consideri una soluzione x^* interna alla faccia ottima (non corrispondente a nessuno dei due vertici). Per il teorema degli scarti complementari, qualsiasi soluzione ottima duale deve rispettare le condizioni degli scarti complementari con qualsiasi soluzione ottima primale, e quindi anche con x^*. L'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^* è $I(x^*) = \{ 4 \}$, e pertanto necessariamente $y_i = 0$ per ogni $i \neq 4$ in qualsiasi soluzione ottima duale: quindi, l'unica soluzione duale possibile è $y_4 = \alpha$ per il valore $\alpha > 0$ tale per cui $c = \alpha A_4$, mentre $y_i = 0$ per ogni $i \neq 4$.

(a) (b)





5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo (TSP) sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal vartice 1 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo (MS1T) come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando il vertice col più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visita breadth-first l'albero delle decisioni, ossia si implementa Q come una fila, e si inseriscono in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di lati fissati a zero (nel caso $r = 3$, in ordine crescente del vertice j del lato $\{\, i \,,\, j \,\}$ fissato a zero, dove i è il vertice con grado 3). Si risponda alle seguenti domande:

A Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 3,\ \bar{z} = \infty$ II $\underline{z} = 3,\ \bar{z} = 9$ III $\underline{z} = 3,\ \bar{z} = 3$

B Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I $x_{12},\ x_{14},\ x_{15}$ II $x_{14},\ x_{24},\ x_{45}$ III nessuna

C Quanti dei figli della radice vengono chiusi e per quale motivo?

I nessun nodo viene chiuso

II 2 per inammissibilità, 1 per la valutazione inferiore

III 1 per la valutazione inferiore, 2 per ottimalità

D Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $z \geq z(P) \geq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

I $z = 5,\ \bar{z} = \infty$ II $z = 3,\ \bar{z} = \infty$ III $z = 3,\ \bar{z} = 6$

E Quanti dei figli del primo figlio della radice vengono chiusi e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità II 2 per la valutazione inferiore III almeno 1 per ottimalità

F Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $z \geq z(P) \geq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i figli del primo figlio della radice?

I $z = 8,\ \bar{z} = \infty$ II $z = 6,\ \bar{z} = \infty$ III $z = 8,\ \bar{z} = 8$

G È possibile modificare il costo del lato $\{\, 2 \,,\, 3 \,\}$ del grafo in modo tale che l'algoritmo termini alla radice (l'1-albero determinato sia un ciclo Hamiltoniano)? Giustificare la risposta.

Risposta: Affinché l'algoritmo termini senza ramificazioni occorre che l'1-albero (MS1T) determinato alla radice sia un ciclo Hamiltoniano, cioè un MS1T con esattamente due lati incidenti per nodo. Non è possibile ottenere un ciclo Hamiltoniano al nodo radice in quanto, a prescindere dal costo del lato $\{\, 2 \,,\, 3 \,\}$, l'algoritmo usato per determinare l'albero di copertura, ad esempio l'algoritmo di Kruskall, inserirà certamente i lati $\{\, 1 \,,\, 4 \,\}$, $\{\, 4 \,,\, 2 \,\}$ e $\{\, 4 \,,\, 5 \,\}$: di conseguenza il nodo 4 avrà sicuramente tre lati incidenti.