1) Per il Giubileo 2025 Roma si sta preparando ad accogliere oltre 32 milioni di pellegrini e il Campidoglio sta mettendo in campo un piano di mobilità urbana straordinaria. A seguito del potenziamento delle linee di bus urbane esistenti e alla creazione di nuove tratte, è prevista una riorganizzazione e razionalizzazione dei depositi dei bus al fine di migliorare il servizio e far fronte alla nuova domanda straordinaria. È stato quindi selezionato dall'amministrazione municipale un insieme K di potenziali siti per la costruzione dei depositi; nel sito $k \in K$ è possibile costruire un deposito con capacità U_{kl} per un certo insieme finito di livelli $l \in L$ (le regole della messa a bando per la costruzione dei nuovi depositi prevedono infatti procedure amministrative specifiche, dipendenti dal livello, per il controllo dello stato di avanzamento dei lavori). Minimizzare i costi complessivi per il Comune di Roma (CdR) è prioritario: sono stati stimati i costi unitari β per la capacità dei depositi ed i costi fissi F_k per la costruzione del deposito nel sito $k \in K$. Inoltre, sono noti i costi di trasferimento di ciascun bus della tratta avente capolinea i e j al sito del deposito k: i tecnici del CdR hanno quantificato i costi unitari γ per unità di distanza per ciascun bus, il numero medio f_{ij} di bus su ciacuna tratta $(i, j) \in A$, dove A indica l'insieme delle tratte servite dai bus nel CdR, e la distanza d_{ijk} che ogni bus della tratta (i, j) deve percorre per raggiungere il sito k. Ogni tratta $(i, j) \in A$ deve essere associata ad esattamente uno e un solo deposito e chiaramente le capacità dei depositi devono essere sufficienti per il numero di bus associati. Il CdR vuole quindi definire un modello matematico per decidere in quali siti realizzare i depositi e determinare la loro capacità.

Definiamo le famiglie di variabili

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se la tratta } (i, j) \text{ viene assegnata al deposito } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i, j) \in A \ , \ k \in K$$

$$z_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se viene selezionato il livello } l \text{ per la capacità del deposito } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad k \in K \ , \ l \in L$$

Parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto

$$\begin{array}{ll} \min & \ldots \\ & \sum_{l \in L} z_{kl} \leq 1 \qquad k \in K \\ & \ldots \end{array}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

A SI NO $y_k \in \{0, 1\} \qquad k \in K$

B SI NO $h_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A$

C SI NO $\sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \qquad (i, j) \in A$

D SI NO $\sum_{(i, j) \in A} x_{ijk} = 1 \qquad k \in K$

E SI NO $\sum_{(i, j) \in A} x_{ijk} \leq y_k \qquad k \in K$

F SI NO $x_{ijk} \leq y_k \qquad (i, j) \in A, \quad k \in K$

G SI NO $x_{ijk} \geq y_k \qquad (i, j) \in A, \quad k \in K$

H SI NO $\sum_{(i, j) \in A} f_{ij} x_{ijk} \leq \sum_{l \in L} U_{kl} \qquad k \in K$

I SI NO $\sum_{(i, j) \in A} f_{ij} h_{ij} x_{ijk} \leq \sum_{l \in L} U_{kl} z_{kl} \qquad k \in K$

J SI NO $\sum_{(i, j) \in A} f_{ij} x_{ijk} \leq \sum_{l \in L} U_{kl} z_{kl} \qquad k \in K$

K SI NO $z_{kl} \leq y_k \qquad k \in K, \quad l \in L$

L SI NO $z_{kl} \geq y_k \qquad k \in K, \quad l \in L$

M SI NO $x_{ijk} \leq h_{ij} \qquad (i, j) \in A, \quad k \in K$

N SI NO $\sum_{k \in K} x_{ijk} \leq h_{ij} \qquad (i, j) \in A$

O SI NO $\sum_{k \in K} F_k y_k + \gamma \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \sum_{k \in K} (d_{ik} + d_{jk}) x_{ijk} + \beta \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} U_{kl}$ (funzione obiettivo)

P SI NO $\sum_{k \in K} F_k y_k + \gamma \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \sum_{k \in K} d_{ijk} x_{ijk} + \beta \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} U_{kl} z_{kl}$ (funzione obiettivo)

Q SI NO $\sum_{k : x_{ijk} = h_{ij}} F_k + \gamma \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \sum_{k \in K} d_{ijk} x_{ijk} + \beta \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} U_{kl} z_{kl}$ (funzione obiettivo)

R SI NO $\sum_{k : \sum_{(i,j) \in A} x_{ijk} = h_{ij}} F_k + \gamma \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \sum_{k \in K} (d_{ik} + d_{jk}) x_{ijk} + \beta \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} U_{kl}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Come cambia la formulazione matematica del modello se la capacità del deposito k può essere scelta con continuità nell'intervallo $[0, C_k]$, dove $C_k > 0$ rappresenta la massima capacità che può essere selezionata per il deposito $k \in K$?

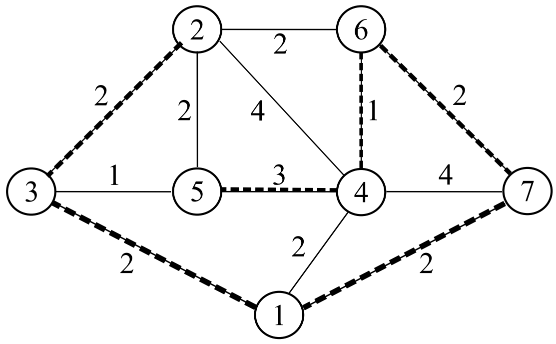
risposta alla domanda b) Occorre introdurre al posto di z_{lk} una famiglia di variabili non negative $h_k \in [0, C_k]$ che indica la capacità selezionata per il deposito $k \in K$, sostituire i vincoli J con

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij} x_{ijk} \leq h_k \qquad k \in K$$

e la funzione obiettivo P con

$$\sum_{k \in K} F_k y_k + \gamma \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \sum_{k \in K} d_{ijk} x_{ijk} + \beta \sum_{k \in K} h_k \, .$$

2) Per il problema del dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{2, 3\}$ con il lato $\{1, 4\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esiste esattamente un altro albero di copertura che ha lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno II $\{1, 3\}$, $\{1, 7\}$, $\{4, 5\}$ e $\{6, 7\}$ III $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ e $\{4, 5\}$

C Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$ II $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$ III $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$

D Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I 11 II 10 III 8

E Qual è il numero minimo di sostituzioni di archi che bisogna effettuare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

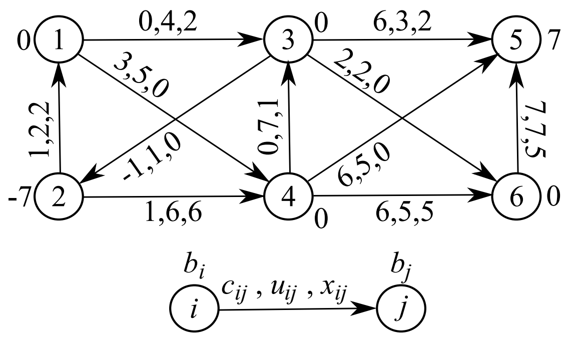
I 1 II 2 III 3

F I) Modificare il costo del minor numero possibile di lati affinché quello dato sia l'unico albero di copertura di costo minimo. II) Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{2, 4\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero? Giustificare le risposte.

Risposta: I) Ponendo $c_{35} > 3$ e $c_{25} > 3$ l'albero di copertura dato è di costo minimo. Infatti, $\{4, 5\}$ in questo caso rispetta strettamente la condizione di ottimalità per tagli: eliminandolo dall'albero si ottiene il taglio che ha come una delle rive il solo vertice 5, i cui lati del taglio sono $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$ e $\{4, 5\}$, e $\{4, 5\}$ è l'unico di costo minimo. In più, sia $\{2, 5\}$ che $\{3, 5\}$ rispettano strettamente la condizione di ottimalità per cicli, in quanto hanno un costo strettamente più grande di quello di tutti gli altri lati dei cicli che si formano aggiungendoli all'albero. Per ottenere l'unicità, però, è necessario porre anche $c_{26} > 2$ e $c_{14} > 2$. Infatti, altrimenti tali lati rispettano la condizione di ottimalità per cicli, ma non strettamente: essi hanno costo pari a quello di almeno un altro lato del ciclo che si forma aggiungendoli all'arco, il che significa che 1è possibile costruire alberi dello stesso costo inserendoli nell'albero ed eliminando uno degli altri alti del ciclo che si forma di pari costo.

II) Scambiando il lato $\{2, 4\}$ con un altro lato dell'albero, non si ottiene alcun albero di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{2, 4\}$ non è presente alcun lato di costo 4.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[0, -7, 0, 0, 7, 0]$ II $[0, -1, 1, 0, 0, 0]$ III $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 85 II 110 III 95

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 3 \to 4 \to 2$ II $5 \to 6 \to 4 \to 5$ III nessuno dei due

D Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ II $2 \to 3 \to 4 \to 2$ III nessuno dei due

E Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $3 \to 1 \to 2$ II $1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4$ III entrambi

F Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $5 \to 6 \to 4 \to 5$ II $2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2$ III entrambi

G Quali dei seguenti cammini va da un nodo con sbilanciamento positivo ad uno con sbilanciamento negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $3 \to 2$ II $5 \to 4 \to 2$ III nessuno dei due

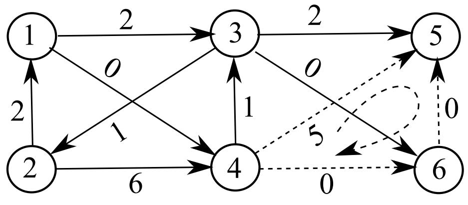
H Si dica se lo pseudoflusso è oppure no un flusso ammissibile, ed altrimenti si indichi come costruirne uno modificando il flusso sul minor numero possibile di archi. Una volta individuato il flusso ammissibile si esegua a partire da esso l'algoritmo della cancellazione di cicli, mostrando le iterazioni mostrate e dimostrando che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare tutte le risposte.

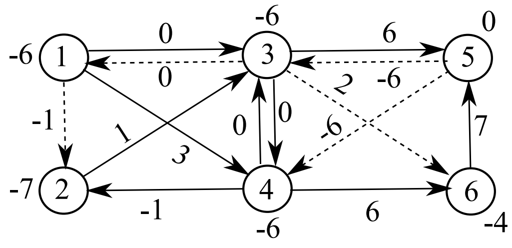
Risposta: Lo pseudoflusso non ha vettore di sbilanciamenti tutto nullo (si veda A); per renderlo un flusso ammissibile è possibile porre $x_{32} = 1$, ossia inviare flusso lungo il cammino aumentante $3 \to 2$ (si veda G). Questo non è l'unico modo, infatti si potrebbe inviare un'unità di flusso da 3 a 2 anche attraverso i cammini aumentanti $3 \to 1 \to 2$ (si veda E) e $3 \to 4 \to 2$, ma ciò implicherebbe cambiare il flusso su un numero maggiore di archi.

Il flusso ammissibile così ottenuto non è però ottimo in quanto esiste il ciclo $C = 5 \to 6 \to 4 \to 5$ che è aumentante (si veda C), in quanto ha capacità

$$\theta(C, x) = \min\{x_{65}, x_{46}, u_{45} - x_{45}\} = \min\{5, 5, 5 - 0\} = 5 > 0$$

ed ha costo $C(C) = -c_{65} - c_{46} + c_{45} = -7 - 6 + 6 = -7 < 0$ (si veda F). Inviando $\theta(C, x) = 5$ unità di flusso lungo C si ottiene il flusso ammissibile $x' = x \oplus 5C$ illustrato in figura qui sotto a sinistra, che è ottimo. Per dimostrarlo basta costruire il grafo residuo rispetto a x' e calcolarne un albero dei cammini minimi (con insieme di radici pari all'insieme N di tutti i nodi), che sono mostrati accanto a destra (gli archi tratteggiati sono quelli dell'albero) insieme al vettore di etichette che rispetta le condizioni di Bellman. Questo dimostra che sul grafo residuo non esistono cicli orientati di costo negativo, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto al flusso ammissibile x'.





4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, al problema di PL dato qui accanto.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & & & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

A Per $B = \{1, 5\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III nessuna delle due cose

B Per $B = \{1, 2\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale non degenere III entrambe le cose

C Per $B = \{2, 4\}$ si può afferare che

I non è una base II è una base primale ammissibile III è una base primale degenere

D Per $B = \{4, 5\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose

E Se la base corrente è $B = \{1, 2\}$, l'indice uscente determinato dall'algoritmo è

I $h = 1$ II $h = 2$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Se la base corrente è $B = \{4, 5\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 4$ è

I ammissibile II di crescita III nessuna delle due cose

G Se la base corrente è $B = \{2, 3\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 3$ è

I ammissibile II di crescita III entrambe le cose

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{2, 3\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte. Infine si discuta se le soluzioni ottime del primale e del duale determinate dall'algoritmo siano le uniche esistenti. Giustificare algebricamente tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{2, 3\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [\,0\,,\,2\,] \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = [\,1/2\,,\,-1/2\,] \quad , \quad \bar{y} = [\,\bar{y}_B\,,\,\bar{y}_N\,] = [\,0\,,\,1/2\,,\,-1/2\,,\,0\,,\,0\,]$$

$$h = \min\{\, i \in B \,:\, \bar{y}_i < 0 \,\} = 3 \;\;,\;\; B(h) = 2 \;\;,\;\; \xi = -A_B^{-1}u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

La direzione ξ è quindi sia ammissibile che di crescita (si veda G). Poiché $A_i\xi > 0$ solamente per $i = 1$, non è necessario calcolare esplicitamente il massimo passo lungo la direzione ξ in quanto l'indice entrante sarà sicuramente $k = 1$.

Alla seconda iterazione, per $B = \{1, 2\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [\,0\,,\,2\,] \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = [\,1/2\,,\,1/2\,] \quad , \quad \bar{y} = [\,\bar{y}_B\,,\,\bar{y}_N\,] = [\,1/2\,,\,1/2\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$$

Poiché $\bar{y}_B \geq 0$, l'algoritmo termina avendo determinato una coppia di soluzioni ottime per il primale ed il duale.

Poiché la base è duale non degenere ($\bar{y}_B > 0$), dal teorema degli scarti complementari segue che qualsiasi soluzione ottima del primale deve soddisfare come uguaglianza entrambe i vincoli 1 e 2, ossia il sistema $A_Bx = b_B$: pertanto, la soluzione primale $\bar{x}$ determinata è l'unica soluzione ottima del problema primale in quanto A_B è invertibile.

Analogamente, è immediato verificare che $I(\bar{x}) = \{1, 2\} = B$, ossia la base è primale non degenere. Ancora dal teorema degli scarti complementari segue che qualsiasi soluzione ottima del duale deve avere $y_i = 0$ per $i \notin B$, ossia deve soddisfare il sistema $y_BA_B = c$; la soluzione $\bar{y}_B$ determinata è l'unica soluzione per tale sistema lineare in quanto A_B è invertibile, e pertanto anche la soluzione duale $\bar{y}$ determinata è l'unica soluzione ottima del problema duale.

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 0.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1, x_3, x_2, x_4\}$ II $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ III $\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$

B Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $[1, 1, 0, 0]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 2

III nessuna delle precedenti è corretta

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 8$ II $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 13/2$ III $\underline{z} = 13/2$, $\bar{z} = 8$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I nessuna II x_3 III x_3, x_4

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 6$, $\bar{z} = 13/2$ II $z = 6$, $\bar{z} = 6$ III $z = 6$, $\bar{z} = 16/3$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I nessuna II $[1, 0, 0, 1]$, $[1, 0, 1, 0]$ III $[1, 0, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibilità

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude un nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H È possibile modificare il peso del primo oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.

Risposta: È possibile porre il peso del primo oggetto a 2: in questo caso si ottengono gli ordinamenti $\{x_2, x_1, x_3, x_4\}$ oppure $\{x_2, x_3, x_1, x_4\}$ (poiché il primo ed il terzo oggetto hanno rendimento uguale pari a 3/2 e quindi possono apparire in qualsiasi ordine). Nel primo caso si ottiene come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 1, 0, 0]$ e nel secondo caso la soluzione intera $[0, 1, 1, 0]$ in quanto la somma dei pesi degli oggetti presi è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Poiché sono le soluzioni ottima del rilassamento continuo, il loro valore di funzione obiettivo $\bar{z} = cx = 5$ è una valutazione superiore sull'ottimo del problema. Ma poiché sono intere, il loro valore di funzione obiettivo $cx = 5$ è anche una valutazione inferiore sull'ottimo del problema, il che porta a porre il valore dell'"incumbent" $z = 5$. Da da ció discende che sono soluzioni ottime e l'algoritmo termina al nodo radice in quanto si ottiene immediatamente $\bar{z} \leq z$ e non è necessario procedere col branching.