1) È il 31 Dicembre dell'anno 79 dell'Era Spaziale (UC). Le forze della Federazione Terrestre (FT) si preparano all'attacco alla fortezza spaziale A Baoa Qu del Principato di Zeon, per quella che passerà alla storia come l'ultima, decisiva battaglia della Guerra di Un Anno. Gli strateghi della FT hanno individuato un insieme S di direzioni di attacco (settori) che i vari squadroni di Mobil Suits (MS) possono utilizzare per avvicinarsi alla fortezza. I MS che attaccano in un settore $s \in S$ potranno colpire sia le batterie laser ed i MS avversari posizionati in s, sia (ma con efficienza minore, stimata al 12%) quelli posizionati nei settori $S(s) \subset S$ "vicini" ad s ($s \notin S(s)$). Gli strateghi della FT hanno stimato la potenza delle difese che il generale comandante di Zeon, Gihren Zabi, ha disposto in ogni $s \in S$, e di conseguenza il numero n_s di MS che sarebbero necessari per ottenere la vittoria in quel settore. Le forze della FT sono però stremate dalla lunga guerra, ed in particolare dall'ultimo, micidiale attacco del "Solar Ray" di Zeon, e non ci sono MS a sufficienza per garantire la vittoria in tutti i settori. Per fortuna la FT dispone del MS sperimentale RX-78-2 "Gundam", detto "il demonio bianco" dai soldati di Zeon: schierato in qualsiasi $s \in S$, il Gundam garantisce anche da solo, grazie alle straordinarie abilità *newtype* del pilota Amuro Rey, di ottenere la vittoria in quel settore. Per contro non è possibile lasciare i settori troppo sguarniti, per evitare che i MS di Zeon in essi presenti si spostino a dare battaglia in quelli vicini; ciò significa che la potenza di fuoco dispiegata in ciascun settore $s \in S$ dovà essere almeno pari al 25% di quella necessaria ad ottenere la vittoria in s, ovviamente a parte il settore in cui viene schierato il Gundam. Aiutate la FT a porre fine alla più sanguinosa guerra che l'Umanità abbia mai visto scrivendo come *PLI* il problema di decidere quanti degli M MS superstiti assegnare ad ogni $s \in S$, e dove schierare il Gundam, in modo da massimizzare il numero di settori nei quali si otterrà la vittoria, e quindi le probabilità di conquistare la fortezza.

Definiamo le famiglie di variabili

$$m_s = \text{numero (intero) di MS che la Federazione decide di assegnare al settore} s \qquad s \in S$$

Parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto

$$\begin{aligned} \min \quad & \dots \\ & \textstyle\sum_{s \in S} m_s \leq M \\ & \dots \end{aligned}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazioni i vincoli di segno e/o integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciati.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $x_{sq} \in \{0, 1\} \quad s \in S \ , \ q \in S$

B SI NO $g_s \in \{0, 1\} \quad s \in S$

C SI NO $v_s \in \{0, 1\} \quad s \in S$

D SI NO $\sum_{q \in S} x_{sq} = 1 \quad s \in S$

E SI NO $\sum_{s \in S} x_{sq} = 1 \quad q \in S$

F SI NO $\sum_{s \in S} g_s \geq 1$

G SI NO $\sum_{s \in S} g_s \leq 1$

H SI NO $\sum_{q \in S(s)} m_q x_{sq} \geq n_s v_s$

I SI NO $\sum_{q \in S(s)} 0.12 m_q x_{sq} \geq n_s(v_s - g_s)$

J SI NO $n_s(v_s - g_s) \leq m_s + 0.12 \sum_{q \in S(s)} m_q \quad s \in S$

K SI NO $n_s(v_s - 0.25 g_s) \leq m_s + 0.12 \sum_{q \in S(s)} m_q \quad s \in S$

L SI NO $0.25 n_s \leq m_q x_{sq} \quad s \in S \ , \ q \in S(s)$

M SI NO $0.25(1 - g_s) \leq m_q x_{sq} \quad s \in S \ , \ q \in S(s)$

N SI NO $0.25 n_s \leq m_q x_{sq} \qquad s \in S \;\; , \;\; q \in S(s)$

O SI NO $0.25 n_s (1 - g_s) \leq m_s + 0.12 \sum_{q \in S(s)} m_q \qquad s \in S$

P SI NO $\sum_{s \in S} \sum_{q \in S(s)} x_{sq}$ [funzione obiettivo]

Q SI NO $\sum_{s \in S} v_s$ [funzione obiettivo]

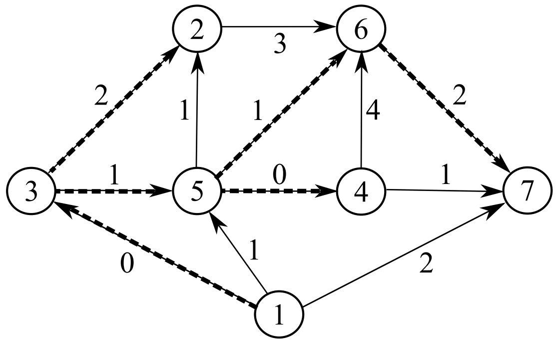
domanda b) Subito prima dell'inizio della battaglia giunge la notizia che Char Aznable "cometa rossa", acerrimo nemico di Amuro Rey ed anch'esso *newtype*, sta per entrare in azione con il nuovissimo, formidabile Mobil Armor MSN-02 "Zeong". Conoscendo le tattiche di Char, gli strateghi stimano la probabilità π_s, $s \in S$, che appaia in ognuno dei settori. Se apparisse nello stesso settore del Gundam lo terrebbe completamente occupato in una feroce battaglia tra *newtype*, impedendogli così di vincere le difese locali. Il numero di settori vinti è quindi una quantità incerta, dipendente dalle imprevedibili scelte di Char. Si modifichi il problema in modo tale da massimizzare il numero atteso di settori vinti.

risposta alla domanda b) Basta modificare la funzione obiettivo come

$$\sum_{s \in S} (v_s - \pi_s g_s)$$

Infatti, $\pi_s g_s$ è la probabilità che Char decida di attaccare esattamente il settore in cui è schierato il Gundam. Poiché sicuramente il modello non avrà schierato in quel settore abbastanza MS da vincerlo quello sarà perso, il che avviene appunto con probabilità $\pi_s g_s$ dando il valore atteso.

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 1 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(5\,,\,6)$ con l'arco $(1\,,\,5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [\,0\,,\,2\,,\,0\,,\,1\,,\,1\,,\,2\,,\,4\,]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 6

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire una buona numerazione che lo dimostra.

I No II Si: $[\,1\,,\,4\,,\,2\,,\,5\,,\,3\,,\,6\,,\,7\,]$ III Si: $[\,6\,,\,2\,,\,5\,,\,4\,,\,7\,,\,1\,,\,3\,]$

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{\,\emptyset\,\}$ II $\{\,(\,1\,,\,7\,)\,\}$ III $\{\,(\,1\,,\,7\,),\,(\,4\,,\,7\,)\,\}$

D Quali archi bisogna sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(\,6\,,\,7\,)$ con $(\,4\,,\,7\,)$

II $(\,6\,,\,7\,)$ con $(\,1\,,\,7\,)$

III entrambe le precedenti sono corrette

E Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

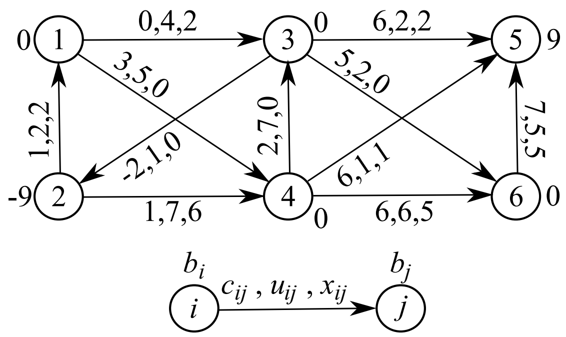
I 8 II 10 III 12

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato, mantenendo i costi degli archi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato, mantenendo i costi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: L'albero dato risulta un albero dei cammini minimi se tutte le condizioni di Bellman sono soddisfatte: basta modificare tra gli archi fuori dall'albero $c_{47} \geq 3$ e $c_{17} \geq 4$, infatti in questo modo risulta $4 = d[7] \leq (1 = d[4]) + c_{47}$ e $4 = d[7] \leq (0 = d[1]) + c_{17}$.

Con un ragionamento analogo, dobbiamo fare in modo di cambiare i costi degli archi dell'allbero affinché tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte (ma non necessariamente in modo stretto, poiché non è richiesta unicità). Ciò è garantito se $c_{67} = 0$; in tal caso, il vettore di etichette diventa $d = [\,0\,,\,2\,,\,0\,,\,1\,,\,1\,,\,2\,,\,2\,]$ che verifica le condizioni di Bellman.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[0, 9, 0, 0, -9, 0]$ II $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$ III $[0, 1, 0, 0, -1, 0]$

B Il costo dello pseudoflusso è:

I 95 II 98 III 91

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $4 \to 3 \to 6 \to 4$ II $2 \to 4 \to 3 \to 2$ III entrambi

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $5 \to 3 \to 2$ II $2 \to 4 \to 3 \to 6$ III entrambi

E Quali dei seguenti cicli ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 2$ II $4 \to 5 \to 6 \to 4$ III entrambi

F Quali dei seguenti cammini ha costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

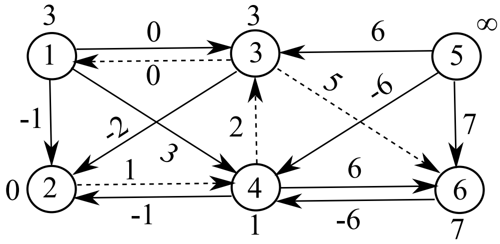
I $5 \to 3 \to 2$ II $3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ III entrambi

G Quali dei seguenti cammini va da un nodo con sbilanciamento positivo ad uno con sbilanciamento negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 4 \to 3 \to 5$ II $1 \to 4 \to 3 \to 6$ III nessuno dei due

H Si dica se lo pseudoflusso è minimale, ed altrimenti si indichi come costruirne uno modificando il flusso sul minor numero possibile di archi. Una volta individuato lo pseudoflusso minimale si esegua a partire da esso l'algoritmo dei cammini minimi successivi, mostrando le iterazioni mostrate e discutendo la soluzione ottenuta. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso è minimale: tutti i cicli aumentanti hanno costo negativo. Per verificarlo è sufficiente calcolare l'albero dei cammini minimi con insieme di radici i nodi con sbilanciamento positivo (il solo 2) sul corrispondente grafo residuo, mostrato sotto a sinistra: il fatto che l'albero esista, come dimostrato dalle etichette che rispettano le condizioni di Bellman, conferma che lo pseudoflusso è minimale. L'unico nodo con sbilanciamento negativo, 5, ha etichetta ∞: infatti esso non è raggiungibile da 2 attraverso cammini orientati sul grafo residuo (e quindi cammini aumentanti rispetto allo pseudoflusso). Ciò mostra che il problema non ha soluzione, e l'algoritmo termina immediatamente indicando questo fatto. Per verificare che la soluzione non esiste basta considerare il taglio $(\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{5\})$, la cui riva sinistra è costituita dai nodi con etichetta finita e quella destra dai nodi con etichetta infinita. Si tratta ovviamente di un taglio saturo: i tre archi $(3, 5)$, $(4, 5)$ e $(6, 5)$, diretti nel taglio, sono tutti saturi. La capacità del taglio è pari ad 8, mentre la somma dei deficits dei nodi della riva sinistra è pari a 9 (e, di conseguenza, quella del nodo della riva destra è -9). Ciò indica che si dovrebbe riuscire a far passare 9 unità di flusso sugli archi del taglio, cosa impossibile poiché non c'è abbastanza capacità per farlo.



4) Considerando l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, al problema di *PL* dato qui accanto, si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & & & & \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & & - & x_2 & \leq & -3 \end{array}$$

A Per $B = \{\,1\,,\,3\,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III nessuna delle due cose

B Per $B = \{\,1\,,\,3\,\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

C Per $B = \{\,1\,,\,4\,\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III entrambe le cose sono vere

D Per $B = \{\,4\,,\,5\,\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III non è una base

E Se la base corrente è $B = \{\,1\,,\,3\,\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 2$ II $k = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Se la base corrente è $B = \{\,1\,,\,4\,\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 2$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{\,1\,,\,3\,\}$, discutendo tutti i passi effettuati e la soluzione determinata. Si giustifichino algebricamente tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{\,1\,,\,3\,\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{y}_B = c A_B^{-1} = [\,2\,,\,0\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [\,2\,,\,0\,]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = b_N \;,\; k = \min\{\, i \in N \;:\; A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{\,4\,\} = 4$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = [\,0\,,\,1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [\,1/2\,,\,1/2\,] \;,\; \theta = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i \;:\; i \in B \,,\, \eta_i > 0 \,\} = \min\{\,4\,,\,0\,\} = 0$$

$$h = \min\{\, i \in B \;:\; \eta_i > 0 \,,\, \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = \min\{\,3\,\} = 3$$

All'iterazione successiva, per $B = \{\,1\,,\,4\,\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,,\, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,,\, \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \,,\, \bar{y}_B = [\,2\,,\,0\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,2\,,\,0\,]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} = b_N \;,\; k = 5 \;,\; \eta_B = [\,0\,,\,-1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0\,,\,-1\,]$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, l'algoritmo termina: $d = [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,1\,] \geq 0$ è una direzione ammissibile di crescita illimitata per il duale. Infatti è immediato verificare che

$$dA = 0 \quad , \quad db > 0 \;.$$

Pertanto, per qualsiasi passo $\theta \geq 0$ si ha che

$$(\bar{y} + \theta d) A = \bar{y} A = c \quad , \quad (\bar{y} + \theta d) \geq \bar{y} \geq 0$$

ossia la soluzione $y(\theta) = \bar{y} + \theta d$ è ammissibile. Inoltre, il suo valore di funzione obiettivo $y(\theta) b = \bar{y} b + \theta (db)$ è crescente in θ. Quindi il duale è superiormente illimitato, e di conseguenza il primale è vuoto.

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 0. Si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lcccccccccc} \max & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1, x_3, x_2, x_4\}$ II $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ III $\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$

B Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $[1, 1, 1, 0]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 5

III entrambe le precedenti sono corrette

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 10$ II $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 28/3$ III $\underline{z} = 28/3$, $\bar{z} = 10$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I nessuna II x_4 III x_4, x_3

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 9$, $\bar{z} = 19/2$ II $z = 9$, $\bar{z} = 9$ III $z = 9$, $\bar{z} = 28/3$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo?

I nessuna II $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 1]$ III $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibilità

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude due nodi per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H 1) È possibile modificare il peso del quarto oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? 2) È possibile modificare il peso del terzo oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare le risposta.

Risposta: 1) È possibile porre il peso del quarto oggetto a 1: in questo caso si ottengono gli ordinamenti $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ oppure $\{x_1, x_3, x_2, x_4\}$ (poiché il terzo ed il quarto oggetto hanno rendimento uguale pari a 1 e quindi possono apparire in qualsiasi ordine). In entrambi i casi si ottiene come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 1, 1, 1]$ che è ovviamente ottima in quanto la somma dei pesi degli oggetti è uguale alla capacità complessiva dello zaino.

2a) È possibile porre il peso del terzo oggetto a 6: in questo caso si ottengono gli ordinamenti $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ oppure $\{x_1, x_2, x_4, x_3\}$ (poiché il terzo ed il quarto oggetto hanno rendimento uguale pari a $1/3$ e quindi possono apparire in qualsiasi ordine). Nel secondo caso si ottiene come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 1, 0, 1]$ in quanto la somma dei pesi del primo, secondo e quarto oggetto è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Poiché è la soluzione ottima del rilassamento continuo, il suo valore di funzione obiettivo $\bar{z} = cx = 8$ è una valutazione superiore sull'ottimo del problema. Ma poiché sono intere, il loro valore di funzione obiettivo $cx = 8$ è anche una valutazione inferiore sull'ottimo del problema, il che porta a porre il valore dell'"incumbent" $z = 8$. Da da ció discende che sono soluzioni ottime e l'algoritmo termina al nodo radice in quanto si ottiene immediatamente $\bar{z} \leq z$ e non è necessario procedere col branching.

2b) È possibile alternativamente porre il peso del terzo oggetto a 3: in questo caso si ottiene l'ordinamento $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 1, 1, 0]$ in quanto la somma dei pesi del primo, secondo e terzo oggetto è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Con ragionamento analogo al caso 2a) si puó mostrare che la soluzione $[1, 1, 1, 0]$ è ottima e l'algoritmo termina al nodo radice.