

1) Anno spaziale 3560. La Terra è sul punto di diventare ormai inabitabile, simile ad un deserto desolato: la specie homo sapiens ha compromesso irreparabilmente l'abitabilità del proprio pianeta tra gas serra e inquinamento atmosferico e delle falde acquifere. Il Governo Mondiale (GM) decide di incaricare un'equipe composta dai migliori astrofisici per studiare una possibile soluzione che eviti l'estinzione della razza umana. Dopo lunghe ed estenuanti ricerche gli astrofisici hanno trovato un pianeta abitabile per trasferire quel che resta degli abitanti del pianeta Terra prima della catastrofe irreparabile e imminente. A questo punto non resta che organizzare il trasferimento. Gli astrofisici contattati hanno inoltre individuate alcuni siti possibili $m \in M$ di insediamento (SdI) sul pianeta. Occorre quindi monitorare i SdI regolarmente per selezionare quelli più idonei per la civiltà umana.

L'equipe di astrofisici ha partorito un'idea a dir poco geniale: inviare delle piccole stazioni orbitanti (PSO) all'uopo progettate per osservare i SdI del nuovo pianeta al di fuori del sistema solare: una flotta di piccoli droni interspaziali in orbita attorno al nuovo pianeta abitabile in grado di valutare l'abitabilità del pianeta stesso. Le PSO devono essere dotate di una particolare configurazione tecnologica (CT) definita dai parametri tecnologici di progettazione della stessa CT. Ogni PSO $i \in S$ deve essere costruita con una sola CT $c \in C(i)$ che dipende dalla particolare PSO. Si definisca l'insieme di tutte le possibili configurazioni tecnologiche come $C := \bigcup_{i \in S} C(i)$. Inoltre l'osservazione dei siti deve avvenire in modo periodico per accertarsi che le condizioni di agibilità del sito stesso non varino nel tempo. In particolare vengono definiti K periodi di osservazione $T(k) \subset T$ per $k \in \{1, 2, \dots, K\}$: il tempo di osservazione complessivo viene quindi discretizzato in istanti di tempo $T = \{1, 2, \dots, H\}$ dove H rappresenta l'orizzonte di tempo stimato affinché l'osservazione sia consistente. Un sito è considerato osservato se esiste almeno una PSO che l'osserva nel periodo $T(k)$.

Il GM contatta un'altra equipe di ricercatori operativi per risolvere quindi il nuovo problema: trovare il minimo numero di PSO in grado di osservare i siti in maniera regolare per tutti i periodi $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, cioè in almeno una istante di tempo tra i $T(k)$ che definiscono il periodo $k \in K$ e contemporaneamente assegnare le CT alle PSO.

Definiamo la famiglia di parametri

$$a_{ictm} = \begin{cases} 1 & \text{se la PSO } i \text{ provvista della CT } c \text{ osserva il sito } m \text{ all'istante } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i \in S, \quad c \in C(i), \quad t \in T, \quad m \in M$$

La formulazione è data da un problema di minimizzazione

$$\begin{aligned} \min \quad & \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione.

☐ A ☒ SI ☐ NO $y_{ic} \in \{0, 1\} \quad i \in S, \quad c \in C(i)$

☐ B ☐ SI ☒ NO $h_i \in \{0, 1\} \quad i \in S$

☐ C ☐ SI ☒ NO $z_c \in \{0, 1\} \quad c \in C$

☐ D ☐ SI ☒ NO $x_{it} \in \{0, 1\} \quad i \in S, \quad t \in T$

☐ E ☒ SI ☐ NO $\sum_{c \in C(i)} y_{ic} \leq 1 \quad i \in S$

☐ F ☐ SI ☒ NO $\sum_{c \in C(i)} y_{ic} = 1 \quad i \in S$

☐ G ☐ SI ☒ NO $\sum_{c \in C(i)} y_{ic} \geq 1 \quad i \in S$

☐ H ☐ SI ☒ NO $y_{ic} \leq z_c \quad i \in S, \quad c \in C(i)$

☐ I ☐ SI ☒ NO $y_{ic} \geq z_c \quad i \in S, \quad c \in C(i)$

☐ J ☐ SI ☒ NO $y_{ic} \leq |C|(1 - x_{it}) \quad i \in S, \quad c \in C(i), \quad t \in T$

☐ K ☒ SI ☐ NO $\sum_{i \in S} \sum_{c \in C(i)} \sum_{t \in T(k)} a_{ictm} y_{ic} \geq 1 \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad m \in M$

☐ L ☐ SI ☒ NO $\sum_{i \in S} \sum_{c \in C(i)} \sum_{t \in T(k)} a_{ictm} y_{ic} \leq 1 \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad m \in M$

☐ M ☐ SI ☐ NO $\sum_{i \in S} \sum_{c \in C(i)} \sum_{t \in T(k)} z_c h_i \leq 1 \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad m \in M$

☐ N ☐ SI ☐ NO $\sum_{i \in S} \sum_{c \in C(i)} \sum_{t \in T(k)} a_{ictm} y_{ic} \leq |C|(1 - x_{it}) \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad m \in M, \quad t \in T$

☐ O ☐ SI ☐ NO $\sum_{i \in S} h_i$ (funzione obiettivo)

☐ P ☐ SI ☐ NO $\sum_{i \in S} \sum_{c \in C(i)} y_{ic}$ (funzione obiettivo)

☐ Q ☐ SI ☐ NO $\sum_{i \in S} \sum_{c \in C} h_i z_c$ (funzione obiettivo)

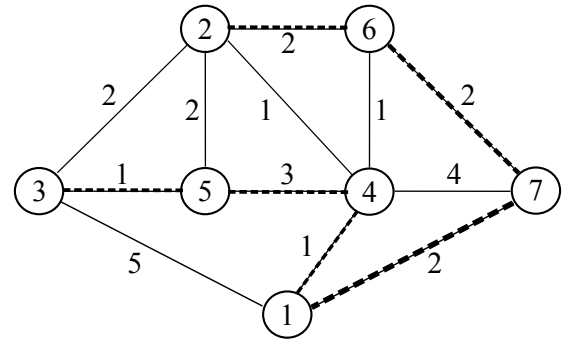
☐ R ☐ SI ☐ NO $\sum_{c \in C} z_c$ (funzione obiettivo)

domanda b) Solo ora ci si rende conto che in fase di progettazione è stato trascurato un piccolo particolare. Per evitare collisioni tra le PSO che orbitano attorno al pianeta abitabile fuori dal sistema solare, bisogna imporre un nuovo vincolo nella formulazione: in ogni istante di tempo $t \in T$ ogni sito $m \in M$ può essere osservato al più da una PSO. Come cambia la formulazione matematica del modello?

risposta alla domanda b) Occorre aggiungere al modello il seguente vincolo affinché venga rispettata la nuova condizione:

$$\sum_{i \in S} \sum_{c \in C(i)} a_{ictm} y_{ic} \leq 1 \quad m \in M, \quad t \in T.$$

2) Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande:



A) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I) Sostituendo il lato $\{2, 6\}$ con il lato $\{2, 5\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II) Esiste esattamente un altro albero di copertura che ha lo stesso costo di quello dato

III) Nessuna delle due

B) Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I) nessuno

II) $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 5\}$ e $\{6, 7\}$

III) $\{1, 4\}$, $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$ e $\{4, 5\}$

C) Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I) $\{2, 4\}$, $\{4, 7\}$

II) $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{4, 6\}$

III) $\{2, 5\}$, $\{4, 6\}$

D) Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I) 11

II) 10

III) 8

E) Qual è il numero minimo di sostituzioni di archi che bisogna effettuare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

I) 1

II) 2

III) 3

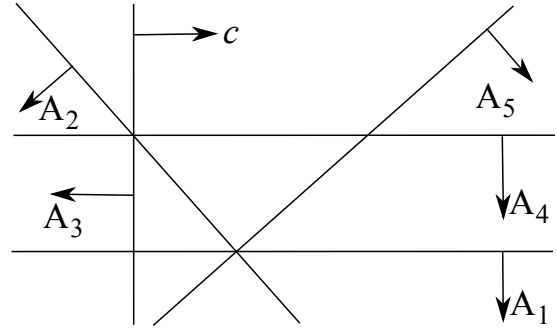
F) I) Modificare il costo del minor numero possibile di lati fuori dall'albero affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. II) Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{2, 4\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero? Giustificare le risposte.

Risposta: I) Ponendo $c_{23} \geq 3$, $c_{24} \geq 2$, $c_{25} \geq 3$ e $c_{46} \geq 2$ l'albero di copertura dato è di costo minimo. Infatti, in questo caso, tutti i lati fuori dall'albero rispettano la condizione di ottimalità per cicli (cf. C): aggiungendo all'albero uno qualsiasi dei lati che non vi appartengono si ottengono cicli il cui lato di costo massimo è proprio quello aggiunto all'albero. Non è richiesta l'unicità e quindi le condizioni precedenti posso anche non essere rispettate strettamente.

II) Scambiando il lato $\{2, 4\}$ con un altro lato dell'albero, si ottiene un solo albero di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{2, 4\}$ è presente un solo lato, $\{1, 4\}$, di costo 1, pari cioè al costo del lato $\{2, 4\}$.

-

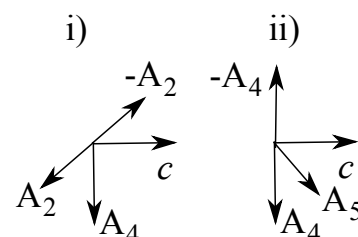
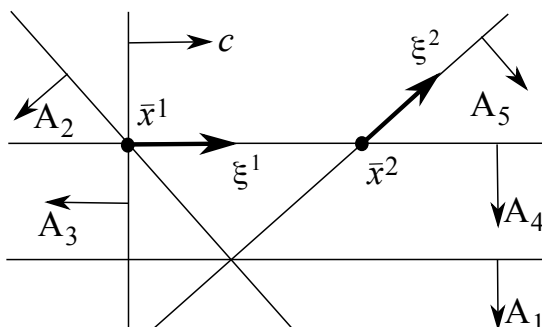
4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simpleso Primal, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c ed A_3 sono collineari (non con lo stesso verso) ed ortogonali ad A_1 ed A_4 , che sono quindi collineari tra loro.



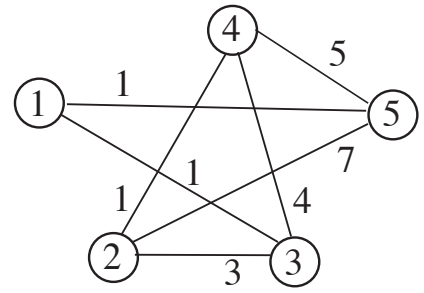
- A** Per $B = \{1, 4\}$ si può affermare che
☐ I è una base primale ammissibile ☐ II è una base primale degenera ☐ III non è una base
- B** Per $B = \{2, 3\}$ si può affermare che
☐ I è una base primale degenera ☐ II è una base duale degenera ☐ III entrambe le cose sono vere
- C** Per $B = \{2, 4\}$ si può affermare che
☐ I è una base primale ammissibile ☐ II è una base duale ammissibile ☐ III non è una base
- D** Se la base corrente è $B = \{2, 3\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 3$ è
☐ I ammissibile ☐ II di crescita ☐ III entrambe le cose sono vere
- E** Se la base corrente è $B = \{2, 4\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 2$ è
☐ I ammissibile ☐ II di crescita ☐ III entrambe le cose sono vere
- F** Se la base corrente è $B = \{4, 5\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 5$ è
☐ I ammissibile ☐ II di crescita ☐ III nessuna delle due cose è vera
- G** Se la base corrente è $B = \{4, 5\}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è
☐ I $h = 4$ ☐ II $h = 5$ ☐ III nessuno (l'algoritmo termina)
- H** Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{2, 4\}$, discutendo tutti i passi effettuati e la soluzione determinata. Si giustificino geometricamente tutte le risposte.

Risposta: La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 2 e 4). B è primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti $c \in \text{cono}(\{-A_2, A_4\})$, come mostrato in i). Pertanto $\bar{y}_2 < 0$ e $\bar{y}_4 > 0$, e quindi $h = 2$. Si determina pertanto la direzione ξ^1 mostrata in figura (interna alla frontiera del vincolo 4, che rimane in base, e che si allontana dalla frontiera del vincolo 2, che uscirà dalla base, avendo con A_2 prodotto scalare negativo). La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) ed è ammissibile (si veda **E**): infatti, ancorché la base sia degenera la direzione ha prodotto scalare negativo (forma un angolo maggiore di 90 gradi) con A_3 , che è attivo ma non in base. Il massimo passo lungo ξ^1 (nullo) si ottiene in corrispondenza del(la frontiera del) vincolo A_5 , e pertanto l'algoritmo seleziona $k = 5$.

Alla seconda iterazione si ha quindi $B = \{4, 5\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 4 e 5. La base è ovviamente ancora primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti $c \in \text{cono}(\{-A_4, A_5\})$, come mostrato in ii). Pertanto $\bar{y}_4 < 0$ e $\bar{y}_5 > 0$, e quindi $h = 4$. Si determina pertanto la direzione ξ^2 mostrata in figura (interna alla frontiera del vincolo 5, che rimane in base, e che si allontana dalla frontiera del vincolo 4, che uscirà dalla base). La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) ed è ammissibile: inoltre, ha prodotto scalare non positivo con tutti i gradienti dei vincoli non in base. Pertanto appartiene al cono di recessione del poliedro, ossia è una direzione ammissibile di crescita illimitata. Quindi l'algoritmo termina (si veda **G**) dichiarando che il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza il problema duale è vuoto.



5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo “Branch and Bound”: l’euristica è l’algoritmo del “vicino più vicino” (nearest neighbour) a partire dal nodo 5 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l’1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell’1-albero (se ve n’è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l’albero delle decisioni è visitato in ampiezza. I figli di ogni nodo nell’albero delle decisioni vengono visitati in ordine lessicografico crescente dei corrispondenti archi fissati a zero (ad esempio, il nodo corrispondente a fissare a zero $\{1, 2\}$ viene visitato prima di quello corrispondente a $\{1, 3\}$). Si risponda alle seguenti domande:



A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I Il lato $\{1, 5\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano individuato dall’euristica

II L’1-albero di costo minimo calcolato alla radice è un ciclo Hamiltoniano

III Nessuna delle precedenti

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall’algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 10, \bar{z} = 11$

II $\underline{z} = 11, \bar{z} = +\infty$

III $\underline{z} = 11, \bar{z} = 15$

C Su quali variabili l’algoritmo ramifica al nodo radice?

I 3: x_{13}, x_{23}, x_{34}

II 3: x_{23}, x_{24}, x_{25}

III nessuna (l’algoritmo termina)

D Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 2 per inammissibilità, 1 per ottimalità

II nessuno

III Almeno 2 per la valutazione inferiore

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $\underline{z} \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l’algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 11, \bar{z} = +\infty$

II $\underline{z} = 10, \bar{z} = 11$

III $\underline{z} = 11, \bar{z} = 11$

F È possibile modificare il grafo di partenza sostituendo il solo lato $\{1, 5\}$ con il lato $\{1, 4\}$ e modificando il relativo costo in modo tale che l’euristica del “vicino più vicino” (nearest neighbour) a partire dal nodo 1 determini un ciclo Hamiltoniano? Giustificare la scelta effettuata.

Risposta: Non è possibile ottenere in nessun modo un ciclo Hamiltoniano: infatti se $c_{14} > 1$ l’euristica considererebbe in ordine i lati $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}$, ma, non esistendo il lato $\{1, 5\}$, produrrebbe una valutazione superiore $\bar{z} = +\infty$; se invece $c_{14} \leq 1$ non è possibile ottenere un ciclo Hamiltoniano in quanto l’euristica considererebbe in ordine i lati $\{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$, ma, non esistendo il lato $\{3, 5\}$, produrrebbe di nuovo una valutazione superiore $\bar{z} = +\infty$.