Nome: **Cognome:** **Matricola:**

1) La società GARBAGE, specializzata nello smaltimento di rifiuti solidi urbani, deve aprire delle discariche per smaltire i rifiuti provenienti da un insieme N di comuni. GARBAGE conosce la quantità r_i (in tonnellate) di rifiuti che ogni comune $i \in N$ deve smaltire ogni giorno. Individua pertanto un insieme D di siti candidati all'apertura di una discarica: per ciascun sito $j \in D$ stima pari a u_j la capacità (tonnellate) di smaltimento giornaliera della discarica costruita in j, e pari a c_j (Euro) il costo giornaliero di aprirla e gestirla.

Per limitare i disagi subiti dagli abitanti della zona, GARBAGE decide di aprire le discariche in modo tale che siano "distanti", ossia massimizzando la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte; è nota la distanza d_{jh} (km) tra ogni coppia $(j, h) \in D \times D$. GARBAGE ha a disposizione un budget complessivo giornaliero di B (Euro), che deve essere sufficiente per sostenere sia i costi di apertura e gestione delle discariche che il costo giornaliero di trasporto dei rifiuti, che è stimato in c (Euro per tonnellata per km); è nota anche la distanza d_{ij} (km) tra ogni coppia $(i, j) \in N \times D$. Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere dove aprire le discariche ed a quali discariche conferire i rifiuti di ogni comune in modo da non eccedere la capacità di smaltimento delle discariche, rispettare il vincolo di budget e massimizzare la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte.

Definiamo la famiglia di variabili "di localizzazione"

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperta una discarica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad j \in D$$

La formulazione è data da un problema di massimizzazione

$$\begin{array}{ll} \max & \ldots \\ & \ldots \end{array}$$

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte $\boxed{\text{SI}}$ oppure $\boxed{\text{NO}}$, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

$\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $z_i \in \{0, 1\} \qquad i \in N$

$\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $x_{ij} \in [0, 1] \qquad (i, j) \in N \times D$

$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $d \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $x_{ij} \leq z_i \qquad (i, j) \in N \times D$

$\boxed{\text{E}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{j \in D} x_{ij} = 1 \qquad i \in N$

$\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{j \in D} x_{ij} \leq 1 \qquad i \in N$

$\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{j \in D} \left(c_j y_j + c \sum_{i \in N} z_i r_i \right) \leq B$

$\boxed{\text{H}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{j \in D} \left(c_j y_j + c \sum_{i \in N} d_{ij} r_i x_{ij} \right) \leq B$

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{j \in D} \left(c_j y_j + c \sum_{i \in N} d_{ij} z_i r_i x_{ij} \right) \leq B$

$\boxed{\text{J}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{i \in N} r_i z_i \leq \sum_{j \in D} u_j y_j$

$\boxed{\text{K}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{i \in N} r_i x_{ij} \leq u_j y_j \qquad j \in D$

$\boxed{\text{L}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $2 d_{jh} (2 - y_j - y_h) \geq d \qquad (j, h) \in D \times D$

$\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $d_{jh} + \max\{ d_{jh} : (j, h) \in D \times D \} (2 - y_j - y_h) \geq d \qquad (j, h) \in D \times D$

$\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ d (funzione obiettivo)

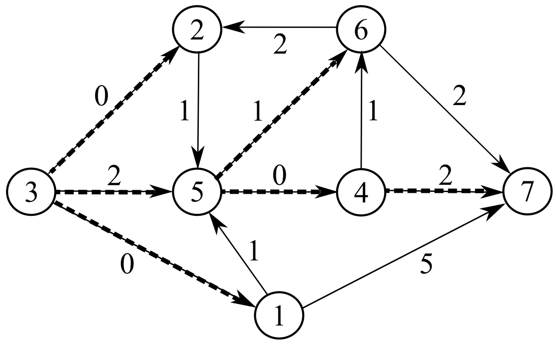
$\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{SI}}\boxed{\text{NO}}$ $\min\{ d_{jh} y_j y_h : (j, h) \in D \times D \}$ (funzione obiettivo)

$\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{i \in N} z_i \max\{\, d_{ji} \, : \, j \in D \,\}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Nel mentre GARBAGE finalizza i suoi piani entra in vigore il nuovo regolamento regionale sui rifiuti che stabilisce che tutti i rifiuti di ciascun comune devono essere assegnati ad esattamente una discarica, invece di poter essere conferiti a più discariche diverse. Si indichi come modificare il modello per tener conto di questo nuovo vincolo.

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 3 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni sull'albero a destra è corretta?

I Sostituendo l'arco $(5\,,\,6)$ con l'arco $(4\,,\,6)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 5

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire una buona numerazione che lo dimostra.

I No   II Si: $[\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,5\,,\,4\,,\,6\,,\,7\,]$ III Si: $[\,6\,,\,2\,,\,5\,,\,4\,,\,1\,,\,7\,,\,3\,]$

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{\,\emptyset\,\}$ II $\{\,(1\,,\,5)\,,\,(1\,,\,7)\,\}$ III $\{\,(2\,,\,5)\,,\,(1\,,\,5)\,\}$

D Quali archi bisogna sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(3\,,\,5)$ con $(2\,,\,5)$

II $(3\,,\,5)$ con $(1\,,\,5)$

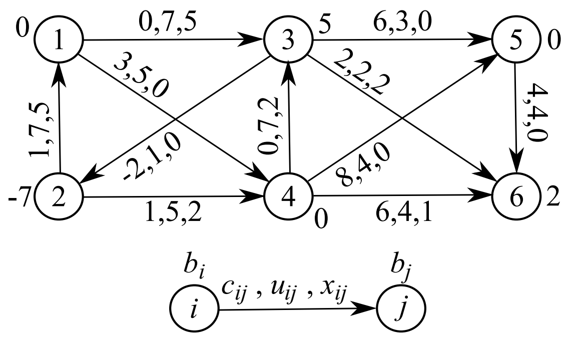
III entrambe le precedenti sono corrette

E Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 6   II 7   III 11

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato, mantenendo i costi degli archi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato, mantenendo i costi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[0, -7, 5, 0, 0, 2]$ II $[0, 0, 0, -1, 0, 1]$ III $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$

B Ponendo $x_{46} = 0$, il vettore degli sbilanciamenti diviene:

I $[0, -7, 5, 1, 0, -1]$ II $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$ III $[0, 0, 0, 1, 0, -1]$

C Il costo dello pseudoflusso ammissibile tra quelli dei primi due punti è

I 21 II 11 III 17

D Per lo pseudoflusso ammissibile tra quelli dei primi due punti, quali dei seguenti cicli sono aumentanti (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 2 \to 1$ II $4 \to 5 \to 6 \to 4$ III entrambi

E Per lo pseudoflusso non ammissibile tra quelli dei primi due punti, quali dei seguenti cammini sono aumentanti (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $5 \to 6 \to 4 \to 2$ II $6 \to 3 \to 2 \to 1$ III entrambi

F Quali dei seguenti cicli hanno costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 2$ II $6 \to 4 \to 5 \to 6$ III nessuno dei due

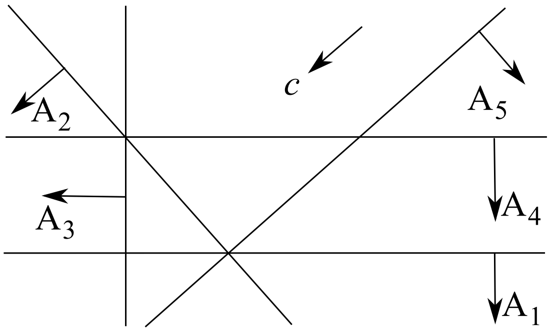
G Quali dei seguenti cammini hanno costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $5 \to 6 \to 3 \to 2$ II $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 6$ III nessuno dei due

H Partendo dallo pseudoflusso ammissibile tra quelli dei primi due punti si esegua a l'algoritmo della cancellazione di cicli, mostrando le iterazioni mostrate e dimostrando che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare tutte le risposte.

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c ed A_2 sono collineari (con lo stesso verso) ed ortogonali ad A_5, mentre separatamente A_1 ed A_4 sono collineari tra loro. Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Per $B = \{2, 3\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

B Per $B = \{1, 4\}$ si può affermare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III non è una base

C Per $B = \{2, 4\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

D Se la base corrente è $B = \{1, 2\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 4$ II $k = 5$ III nessuno (il primale è vuoto)

E Se la base corrente è $B = \{1, 3\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 2$ II $k = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Se la base corrente è $B = \{2, 3\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 4$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{1, 2\}$, discutendo tutti i passi effettuati e la soluzione determinata. Si giustifichino geometricamente tutte le risposte. Al termine si discuta l'unicità delle soluzioni ottime primali e duali (se sono state determinate).

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 0. Si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 7 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0\,,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_4\,, x_3\,, x_2\,, x_1\}$ II $\{x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4\}$ III $\{x_3\,, x_2\,, x_4\,, x_1\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione dell'euristica al nodo radice è $[\,1\,, 1\,, 0\,, 0\,]$

II La soluzione dell'euristica al nodo radice non cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 5

III entrambe le precedenti sono corrette

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 21/2$ II $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 9$ III $\underline{z} = 21/2$, $\bar{z} = 11$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I nessuna II x_3, x_4, x_2 III x_3, x_4

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 9$, $\bar{z} = 21/2$ II $z = 9$, $\bar{z} = 9$ III $z = 9$, $\bar{z} = 28/3$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili restituite dall'euristica?

I $[\,1\,, 1\,, 0\,, 0\,]$ II $[\,1\,, 1\,, 0\,, 0\,]$, $[\,1\,, 0\,, 1\,, 0\,]$, $[\,0\,, 1\,, 1\,, 0\,]$ III $[\,1\,, 1\,, 1\,, 0\,]$, $[\,1\,, 1\,, 0\,, 0\,]$, $[\,0\,, 0\,, 0\,, 1\,]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibilità

II L'algoritmo chiude esattamente due nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo non chiude alcun nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H 1) È possibile modificare il profitto del quarto oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? 2) È possibile modificare il peso del terzo oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare le risposta.