1) La società GARBAGE, specializzata nello smaltimento di rifiuti solidi urbani, deve aprire delle discariche per smaltire i rifiuti provenienti da un insieme N di comuni. GARBAGE conosce la quantità r_i (in tonnellate) di rifiuti che ogni comune $i \in N$ deve smaltire ogni giorno. Individua pertanto un insieme D di siti candidati all'apertura di una discarica: per ciascun sito $j \in D$ stima pari a u_j la capacità (tonnellate) di smaltimento giornaliera della discarica costruita in j, e pari a c_j (Euro) il costo giornaliero di aprirla e gestirla.

Per limitare i disagi subiti dagli abitanti della zona, GARBAGE decide di aprire le discariche in modo tale che siano "distanti", ossia massimizzando la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte; è nota la distanza d_{jh} (km) tra ogni coppia $(j, h) \in D \times D$. GARBAGE ha a disposizione un budget complessivo giornaliero di B (Euro), che deve essere sufficiente per sostenere sia i costi di apertura e gestione delle discariche che il costo giornaliero di trasporto dei rifiuti, che è stimato in c (Euro per tonnellata per km); è nota anche la distanza d_{ij} (km) tra ogni coppia $(i, j) \in N \times D$. Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere dove aprire le discariche ed a quali discariche conferire i rifiuti di ogni comune in modo da non eccedere la capacità di smaltimento delle discariche, rispettare il vincolo di budget e massimizzare la minima distanza intercorrente tra le coppie di discariche aperte.

Definiamo la famiglia di variabili "di localizzazione"

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperta una discarica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in D$$

La formulazione è data da un problema di massimizzazione

$$\begin{aligned} \max \;& \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte $\boxed{\text{SI}}$ oppure $\boxed{\text{NO}}$, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI **NO** $z_i \in \{0, 1\} \qquad i \in N$

B **SI** NO $x_{ij} \in [0, 1] \qquad (i, j) \in N \times D$

C **SI** NO $d \in \mathbb{R}$

D SI **NO** $x_{ij} \leq z_i \qquad (i, j) \in N \times D$

E **SI** NO $\sum_{j \in D} x_{ij} = 1 \qquad i \in N$

F SI **NO** $\sum_{j \in D} x_{ij} \leq 1 \qquad i \in N$

G SI **NO** $\sum_{j \in D} \left(c_j y_j + c \sum_{i \in N} z_i r_i \right) \leq B$

H **SI** NO $\sum_{j \in D} \left(c_j y_j + c \sum_{i \in N} d_{ij} r_i x_{ij} \right) \leq B$

I SI **NO** $\sum_{j \in D} \left(c_j y_j + c \sum_{i \in N} d_{ij} z_i r_i x_{ij} \right) \leq B$

J SI **NO** $\sum_{i \in N} r_i z_i \leq \sum_{j \in D} u_j y_j$

K **SI** NO $\sum_{i \in N} r_i x_{ij} \leq u_j y_j \qquad j \in D$

L SI **NO** $2 d_{jh} (2 - y_j - y_h) \geq d \qquad (j, h) \in D \times D$

M **SI** NO $d_{jh} + \max\{ d_{jh} : (j, h) \in D \times D \} (2 - y_j - y_h) \geq d \qquad (j, h) \in D \times D$

N **SI** NO d (funzione obiettivo)

O SI **NO** $\min\{ d_{jh} y_j y_h : (j, h) \in D \times D \}$ (funzione obiettivo)

$\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{i \in N} z_i \max\{ d_{ji} \, : \, j \in D \}$ (funzione obiettivo)

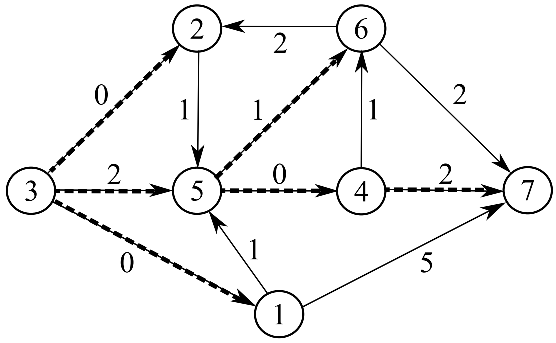
domanda b) Nel mentre GARBAGE finalizza i suoi piani entra in vigore il nuovo regolamento regionale sui rifiuti che stabilisce che tutti i rifiuti di ciascun comune devono essere assegnati ad esattamente una discarica, invece di poter essere conferiti a più discariche diverse. Si indichi come modificare il modello per tener conto di questo nuovo vincolo.

risposta alla domanda b) Basterebbe aggiungere il vincolo di integralità

$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \qquad (\, i \,,\, j \,) \in N \times D$$

in modo tale da rendere le variabili "di flusso" x_{ij} variabili "di semiassegnamento" (binarie).

2) Per il problema del dell'albero dei cammini minimi di radice 3 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni sull'albero a destra è corretta?

I Sostituendo l'arco $(5\,,\,6)$ con l'arco $(4\,,\,6)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 5

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire una buona numerazione che lo dimostra.

I No   II Si: $[\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,5\,,\,4\,,\,6\,,\,7\,]$ III Si: $[\,6\,,\,2\,,\,5\,,\,4\,,\,1\,,\,7\,,\,3\,]$

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{\,\emptyset\,\}$ II $\{\,(1\,,\,5)\,,\,(1\,,\,7)\,\}$ III $\{\,(2\,,\,5)\,,\,(1\,,\,5)\,\}$

D Quali archi bisogna sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(\,3\,,\,5\,)$ con $(\,2\,,\,5\,)$

II $(\,3\,,\,5\,)$ con $(\,1\,,\,5\,)$

III entrambe le precedenti sono corrette

E Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

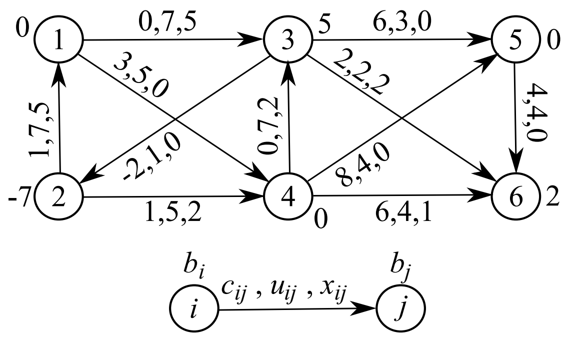
I 6   II 7   III 11

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato, mantenendo i costi degli archi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato, mantenendo i costi non negativi, affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: L'albero dato risulta un albero dei cammini minimi se tutte le condizioni di Bellman sono soddisfatte: basta modificare tra gli archi fuori dall'albero $c_{15} \geq 2$ e $c_{25} \geq 2$, infatti in questo modo risulta $2 = d[5] \leq (0 = d[1]) + c_{15}$ e $2 = d[4] \leq (0 = d[2]) + c_{25}$.

Con un ragionamento analogo, dobbiamo fare in modo di cambiare i costi degli archi dell'allbero affinché tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte (ma non necessariamente in modo stretto, poiché non è richiesta unicità). Ciò è garantito se $c_{35} \in [0\,,1]$; in tal caso, il vettore di etichette diventa $d = [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,c_{35}\,,\,c_{35}\,,\,1 + c_{35}\,,\,2 + c_{35}\,]$ che verifica le condizioni di Bellman se $c_{35} \in [0\,,1]$;.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[0, -7, 5, 0, 0, 2]$ II $[0, 0, 0, -1, 0, 1]$ III $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$

B Ponendo $x_{46} = 0$, il vettore degli sbilanciamenti diviene:

I $[0, -7, 5, 1, 0, -1]$ II $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$ III $[0, 0, 0, 1, 0, -1]$

C Il costo dello pseudoflusso ammissibile tra quelli dei primi due punti è

I 21 II 11 III 17

D Per lo pseudoflusso ammissibile tra quelli dei primi due punti, quali dei seguenti cicli sono aumentanti (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 2 \to 1$ II $4 \to 5 \to 6 \to 4$ III entrambi

E Per lo pseudoflusso non ammissibile tra quelli dei primi due punti, quali dei seguenti cammini sono aumentanti (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $5 \to 6 \to 4 \to 2$ II $6 \to 3 \to 2 \to 1$ III entrambi

F Quali dei seguenti cicli hanno costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 2$ II $6 \to 4 \to 5 \to 6$ III nessuno dei due

G Quali dei seguenti cammini hanno costo negativo (l'ordine dei nodi indica il verso):

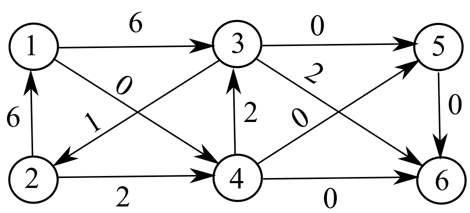
I $5 \to 6 \to 3 \to 2$ II $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 6$ III nessuno dei due

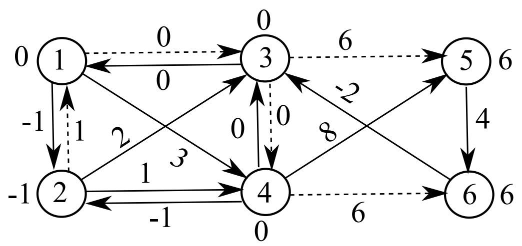
H Partendo dallo pseudoflusso ammissibile tra quelli dei primi due punti si esegua a l'algoritmo della cancellazione di cicli, mostrando le iterazioni mostrate e dimostrando che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo (pseudo)flusso ammissibile è quello del punto B. Esso non è un flusso ottimo in quanto esiste il ciclo $C = 1 \to 3 \to 2 \to 1$ che è aumentante (si veda D) e di costo negativo (si veda F); in altri termini sul grafo residuo esiste un corrispondente ciclo orientato di costo negativo e quindi non esiste un albero dei cammini minimi. L'algoritmo procede dunque a "cancellare" il ciclo C inviando su di esso la massima quantità di flusso possibile, ossia

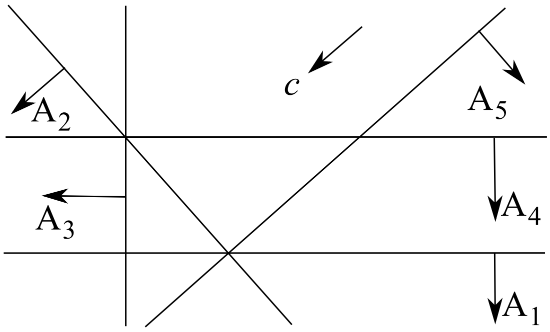
$$\theta(C, x) = \min\{ \min\{ u_{ij} - x_{ij} \,:\, (i, j) \in C^+ \}, \min\{ x_{ij} \,:\, (i, j) \in C^- \} \} = \min\{ \min\{ 7 - 5, 7 - 5, 1 - 0 \}, \min \emptyset \} = 1$$

(tutti gli archi del ciclo sono concordi). Il flusso corrispondente, mostrato sotto a sinistra, è ottimo, come si può verificare calcolando un albero dei cammini minimi sul grafo residuo rispetto ad esso con insieme di radici N, quale quello mostrato sotto a destra (archi tratteggiati) con le rispettive etichette (si noti che non è unico in quanto alcuni archi fuori dall'albero rispettano le condizioni di Bellman all'uguaglianza). Poiché esiste l'albero non possono esistere cicli orientati di costo negativo sul grafo residuo, e quindi cicli aumentanti di costo negativo.





4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c ed A_2 sono collineari (con lo stesso verso) ed ortogonali ad A_5, mentre separatamente A_1 ed A_4 sono collineari tra loro. Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Per $B = \{2, 3\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

B Per $B = \{1, 4\}$ si può affermare che

I è una base primale ammissibile II è una base primale degenere III non è una base

C Per $B = \{2, 4\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

D Se la base corrente è $B = \{1, 2\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 4$ II $k = 5$ III nessuno (il primale è vuoto)

E Se la base corrente è $B = \{1, 3\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 2$ II $k = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

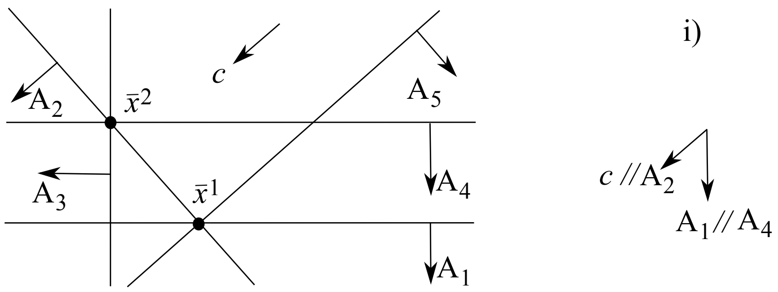
F Se la base corrente è $B = \{2, 3\}$, l'indice entrante determinato dall'algoritmo è

I $k = 4$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{1, 2\}$, discutendo tutti i passi effettuati e la soluzione determinata. Si giustifichino geometricamente tutte le risposte. Al termine si discuta l'unicità delle soluzioni ottime primali e duali (se sono state determinate).

Risposta: La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 1 e 2). B è duale ammissibile (ovviamente), ed in particolare duale degenere: poiché c è collinare ad A_2 si ha $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_2 > 0$. La base peró non è primale ammissibile: infatti è violato il solo vincolo 4, per cui necessariamente l'indice entrante è $k = 4$ (si veda D). Per determinare l'indice entrante occorre considerare $\eta_B = A_4 A_B^{-1}$, ossia in che modo A_4 sia rappresentabile come combinazione lineare di A_1 e A_2. Dalla figura i) a destra si nota che A_1 è collinare ad A_4, e di conseguenza $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 = 0$: pertanto, l'unico indice $i \in B$ per cui risulta $\eta_i > 0$ è $i = 1$, e quindi l'indice uscente è $h = 1$.

Alla seconda iterazione si ha quindi $B = \{2, 4\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 2 e 4; rimane ovviamente duale ammissibile, ma adesso è anche primale ammissibile. Quindi l'algoritmo termina (si veda F) avendo determinato una soluzione ottima sia per il problema primale che per il problema duale.



Poiché la base ottima è sia primale che duale degenere (si veda C), sia la soluzione ottima primale che quella duale potrebbero non essere uniche, ma questo non è necessariamente il caso. Infatti, la base è duale degenere per via del fatto che c è collineare ad A_2, e quindi la faccia del poliedro determinata da A_2 contiene tutte le soluzioni ottime: ma poiché, per via dei vincoli A_3 ed A_4, la faccia coincide con il vertice $\bar{x}^2$, la soluzione ottima primale è in effetti unica. Di converso, poiché la base è primale degenere la soluzione ottima duale potrebbe non essere unica, ed in questo caso effettivamente ciò accade. Infatti, per determinare una soluzione duale ottima che rispetti gli scarti complementari con $\bar{x}^2$ si possono usare tutte e tre le variabili duali y_2, y_3 ed y_4 per ottenere $y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4 = c$. Poiché A_2 è collineare a c (con lo stesso verso), esiste un valore $\bar{y}_2 > 0$ tale che $\bar{y}_2 A_2 = c$. Ma anche la base $\{3, 4\}$ è duale ammissibile, come è immediato verificare graficamente, e pertanto esistono valori $\bar{y}_3 > 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ tali che $\bar{y}_3 A_3 + \bar{y}_4 A_4 = c$. Pertanto, la soluzione duale (ad esempio) $[\, 0, \bar{y}_2/2, \bar{y}_3/2, \bar{y}_4/2, 0 \,]$ è anch'essa duale ammissibile e diversa da quella determinata dall'algoritmo.

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 0. Si risponda alle domande seguenti. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lcccccccccc} \max & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 7 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$ II $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ III $\{x_3, x_2, x_4, x_1\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione dell'euristica al nodo radice è $[1, 1, 0, 0]$

II La soluzione dell'euristica al nodo radice non cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 5

III entrambe le precedenti sono corrette

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 21/2$ II $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 9$ III $\underline{z} = 21/2$, $\bar{z} = 11$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I nessuna II x_3, x_4, x_2 III x_3, x_4

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 9$, $\bar{z} = 21/2$ II $z = 9$, $\bar{z} = 9$ III $z = 9$, $\bar{z} = 28/3$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili restituite dall'euristica?

I $[1, 1, 0, 0]$ II $[1, 1, 0, 0]$, $[1, 0, 1, 0]$, $[0, 1, 1, 0]$ III $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per inammissibilità

II L'algoritmo chiude esattamente due nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo non chiude alcun nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H 1) È possibile modificare il profitto del quarto oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? 2) È possibile modificare il peso del terzo oggetto, mantenendolo strettamente positivo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare le risposta.

Risposta: 1) Occorre che il profitto del quarto sia maggiore o uguale a 20/3: in questo caso si ottiene l'ordinamento $\{x_1, x_4, x_2, x_3\}$ (poiché il rendimento del quarto oggetto risulta maggiore o uguale al rendimento del secondo oggetto, poichè $p_4/w_4 = p_4/5 \geq p_2/w_2 = 4/3 \Rightarrow p_4 \geq 20/3$). In questo caso si ottiene come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 0, 0, 1]$ in quanto la somma dei pesi del primo e del quarto oggetto è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Poiché è la soluzione ottima del rilassamento continuo, il suo valore di funzione obiettivo $\bar{z} = cx = 6$ è una valutazione superiore sull'ottimo del problema. Ma poiché sono intere, il loro valore di funzione obiettivo $cx = 6$ è anche una valutazione inferiore sull'ottimo del problema, il che porta a porre il valore dell'"incumbent" $z = 6$. Da da ció discende che sono soluzioni ottime e l'algoritmo termina al nodo radice in quanto si ottiene immediatamente $\bar{z} \leq z$ e non è necessario procedere col branching.

2) È possibile porre il peso del terzo oggetto a 2 in questo caso si ottiene l'ordinamento $\{x_1, x_3, x_2, x_4\}$ e come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $[1, 1, 1, 0]$ in quanto la somma dei pesi del primo, secondo e terzo oggetto è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Con ragionamento analogo al caso 1) si puó mostrare che la soluzione $[1, 1, 1, 0]$ è ottima e l'algoritmo termina al nodo radice.