**1)** L'emergente network Radio Maya the Bee (RMtB) vuole estendere le proprie trasmissioni radiofoniche ad una nuova regione dove contrastare il dominio della popolarissima Radio Tecla Spider (RTS). Per far ciò può ottenere in concessione frequenze FM negli $n$ distretti $D = \{1, \ldots, n\}$ della regione. Per ogni distretto $i$ si conosce l'insieme $F(i) \subseteq F$ delle frequenze disponibili, il canone annuale $c_{ij}$ di concessione per ciascuna frequenza $j \in F(i)$ ed una stima $r_i$ del numero di potenziali radioascoltatori che sarebbero disponibili ad abbandonare RTS.

Inoltre RMtB può affittare per 3 fasce orarie di trasmissione $K = \{$ 6:00-14:00 , 14:00-22:00 , 22:00-6:00 $\}$ le stazioni di ripetitori radio già presenti sul territorio, in modo da garantire le trasmissioni nelle 24 ore. Per ogni distretto $i$ si conosce l'insieme delle stazioni $S(i) \subseteq S$ che possono coprirlo: per trasmettere su un distretto, occorre che ci sia almeno una stazione che lo copre. Per affittare dalla stazione $s \in S$ la fascia oraria $k \in K$, il network deve pagare un costo $l_{sk}$.

Il budget totale a disposizione di RMtB è $U$ per l'acquisto delle frequenze e per il costo di locazione dalle stazioni delle fasce orarie. Si formuli in termini di *PLI* il problema di stabilire in quali distretti trasmettere e quali frequenze richiedere allo scopo di massimizzare il numero totale di potenziali radioascoltatori da strappare all'emittente rivale e da quali stazioni il network deve affittare le varie fasce orarie per garantire il segnale nelle 24 ore.

Definiamo la famiglia di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se RMtB richiede in concessione la frequenza } j \text{ nel distretto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in D \ , \ j \in F(i)$$

$$z_{sk} = \begin{cases} 1 & \text{se RMtB copre la fascia oraria } k \text{ con la stazione } s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad s \in S \ , \ k \in K$$

La formulazione è data da un problema di massimizzazione

$$\begin{array}{ll} \max & \ldots \\ & \ldots \end{array}$$

Si considerino aggiunti alla formulazione anche tutti i vincoli di integralità e di bound corrispondenti alle variabili indicate.

**domanda a)** Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $y_i \in \{0, 1\} \qquad i \in D$

B SI NO $h_j \in \{0, 1\} \qquad j \in F$

C SI NO $t_k \in \{0, 1\} \qquad k \in K$

D SI NO $y_i \leq \sum_{j \in F(i)} x_{ij} \qquad i \in D$

E SI NO $y_i \geq \sum_{j \in F(i)} x_{ij} \qquad i \in D$

F SI NO $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq 1$

G SI NO $y_i \leq h_j x_{ij} \qquad i \in D \ , \ j \in F(i)$

H SI NO $\sum_{i \in D} \sum_{j \in F(i)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} l_{sk} z_{sk} \leq U$

I SI NO $\sum_{i \in D} \sum_{j \in F(i)} c_{ij} h_j x_{ij} + \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} l_{sk} z_{sk} \leq U$

J SI NO $\sum_{i \in D} \sum_{s \in S(i)} z_{sk} \geq t_k \qquad k \in K$

K SI NO $\sum_{k \in K} z_{sk} \geq 1 \qquad s \in S$

L SI NO $y_i \geq z_{sk} \qquad i \in D \ , \ s \in S(i) \ , \ k \in K$

M SI NO $y_i \geq \sum_{s \in S(i)} z_{sk} \qquad i \in D \ , \ k \in K$

N SI NO $y_i \leq \sum_{s \in S(i)} z_{sk} \qquad i \in D \quad , \quad k \in K$

O SI NO $\sum_{i \in D} r_i y_i$ (funzione obiettivo)

P SI NO $\sum_{i \in D} \sum_{j \in F(i)} x_{ij} y_i$ (funzione obiettivo)

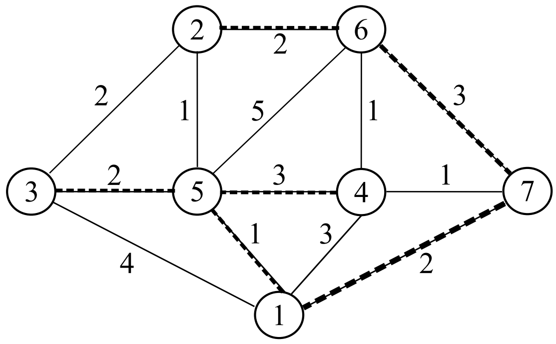
Q SI NO $\sum_{j \in F} h_j$ (funzione obiettivo)

**domanda b)** L'ente regolatore delle concessioni delle frequenze rende noto che, secondo le vigenti leggi regionali sulla concorrenza, ogni stazione può affittare al network al più 2 fasce orarie al giorno. Modificare il modello precedente in modo opportuno.

**risposta alla domanda b)** Occorre aggiungere al modello il seguente vincolo affinché venga rispettata la nuova condizione:

$$\sum_{k \in K} z_{sk} \leq 2 \qquad s \in S\,.$$

**2)** Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**




A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{4,5\}$ con il lato $\{1,4\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esiste esattamente un altro albero di copertura che ha lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno II $\{1,7\}$ e $\{2,6\}$ III $\{1,7\}$, $\{2,6\}$, $\{4,5\}$ e $\{6,7\}$

C Quali sono tutti i lati che non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I nessuno II $\{1,4\}$, $\{2,5\}$, $\{4,7\}$ e $\{5,6\}$ III $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{4,6\}$ e $\{4,7\}$

D Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I 10 II 8 III 6

E Qual è il numero minimo di sostituzioni di lati che bisogna effettuare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

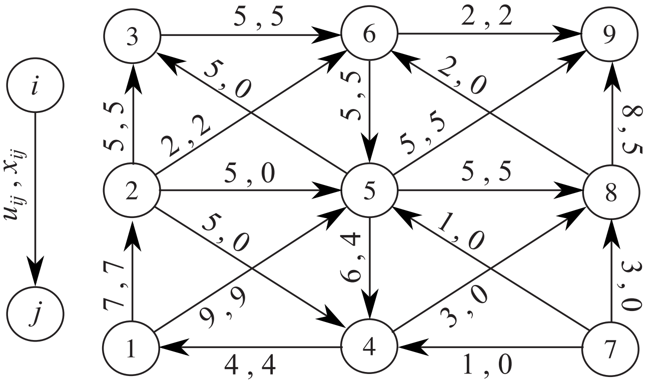
I 1 II 2 III 3

F I) Modificare il costo del minor numero possibile di lati dell'albero affinché quello dato sia l'unico albero di copertura di costo minimo. II) Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{4,7\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero? Giustificare le risposte.

**Risposta**: I) Ponendo $c_{17}, c_{26}, c_{54}, c_{67} < 1$ e $c_{35} < 2$ l'albero dato è l'unico albero di copertura di costo minimo. Infatti, in questo caso, tutti i lati dell'albero rispettano la condizione di ottimalità per tagli (cf. B) in senso stretto.

II) Scambiando il lato $\{4,7\}$ con un altro lato dell'albero, si ottiene un solo albero di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{4,7\}$ è presente un solo lato, $\{1,5\}$, di costo 1, pari cioè al costo del lato $\{4,7\}$.

**3)** Per il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 9 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**




A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 12 | II ammissibile di valore 16 | III non ammissibile

B Ponendo $x_{41} = 0$ si ottiene un flusso:

I ammissibile di valore 12 | II ammissibile di valore 16 | III non ammissibile

C Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:

I $2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ | II $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ | III entrambi

D Quale dei seguenti tagli $(\,N_s\,,\,N_t\,)$ mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 15:

I $N_t = \{\,9\,\}$ | II $N_t = \{\,7\,,\,8\,,\,9\,\}$ | III entrambi

E Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti tagli $(\,N_s\,,\,N_t\,)$ è saturo:

I $N_t = \{\,9\,\}$ | II $N_s = \{\,1\,,\,2\,,\,4\,\}$ | III nessuno dei due

F A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmons&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:

I 1 | II 2 | III 3

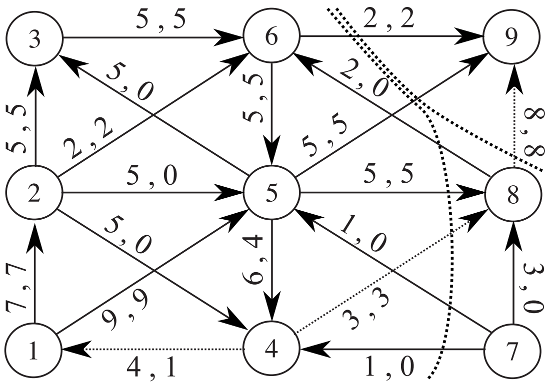
G Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio $(\,N_s\,,\,N_t\,)$ individuato dall'algoritmo è:

I $N_t = \{\,9\,\}$ | II $N_t = \{\,7\,,\,8\,,\,9\,\}$ | III nessuno dei due

H Si discuta quale sia il numero di archi tali che aumentandone la capacità il valore del flusso massimo aumenti strettamente. Giustificare la risposta.

**Risposta**: Il flusso ottimo, di valore $v = 15$, è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso dato, che è già e ammissibile di valore 12 (si veda A), inviando tre unità di flusso lungo il cammino $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ (archi tratteggiati in figura), che è aumentante (si veda C). Ciò richiede un'iterazione, ma l'algoritmo deve eseguire anche una seconda visita del grafo residuo (si veda F), che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio $T = (\,N_s\,,\,N_t\,)$, con $N_t = \{\,7\,,\,8\,,\,9\,\}$ (tratteggiato in figura, si veda G), di capacità (si veda D)

$$u(\,N_s\,,\,N_t\,) = u_{69} + u_{59} + u_{58} + u_{48} = 2 + 5 + 5 + 3 = 15,$$




che è saturo e quindi è il taglio di capacità minima.

Questo non è l'unico taglio di capacità minima: infatti, anche $T' = (\,N'_s\,,\,N'_t\,)$ con $N'_t = \{\,9\,\}$ (tratteggiato in figura) è saturo ed ha capacità 9. Gli insiemi degli archi dei tagli $T$ e $T'$ non sono disgiunti, ed in particolare $(\,6\,,\,9\,)$ e $(\,5\,,\,9\,)$ appartengono ad entrambi. Pertanto, aumentare la capacità di uno di questi due archi permetterebbe di aumentare il flusso, ad esempio attraverso il cammino $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 9$ nel primo caso ed il cammino $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ nel secondo. Pertanto la risposte è due.

**4)** Considerando l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, al problema di *PL* dato qui accanto, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & & & \leq & 2 \end{array}$$

A Per $B = \{1, 5\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile  II è una base primale degenere  III nessuna delle due cose

B Per $B = \{1, 2\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile  II è una base primale non degenere  III entrambe le cose

C Per $B = \{1, 3\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile  II è una base primale degenere  III non è una base

D Per $B = \{4, 5\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere  II è una base duale degenere  III non è una base

E Se la base corrente è $B = \{1, 2\}$, l'indice uscente determinato dall'algoritmo è

I $h = 1$  II $h = 2$  III nessuno (l'algoritmo termina)

F Se la base corrente è $B = \{1, 4\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 1$ è

I ammissibile  II di crescita  III nessuna delle due cose

G Se la base corrente è $B = \{2, 3\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$ per $h = 2$ è

I ammissibile  II di crescita  III entrambe le cose

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{2, 3\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte, in particolare le conclusioni a cui giunge l'algoritmo sulla soluzione ottima.

**Risposta**: Per $B = \{2, 3\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [\,2\,,\,0\,] \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = [\,-1\,,\,-1\,] \quad , \quad \bar{y} = [\,\bar{y}_B\,,\,\bar{y}_N\,] = [\,0\,,\,-1\,,\,-1\,,\,0\,,\,0\,]$$

$$h = \min\{\, i \in B \,:\, \bar{y}_i < 0 \,\} = \min\{\,2\,,\,3\,\} = 2 \ , \ B(h) = 1 \ , \ \xi = -A_B^{-1}u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

$$A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

La direzione $\xi$ è quindi sia ammissibile che di crescita (si veda G). Poiché $A_N\xi \leq 0$, l'algoritmo termina avendo stabilito che il problema primale è superiormente illimitato e quindi il problema duale è vuoto. Infatti, tutte le soluzioni della famiglia parametrica

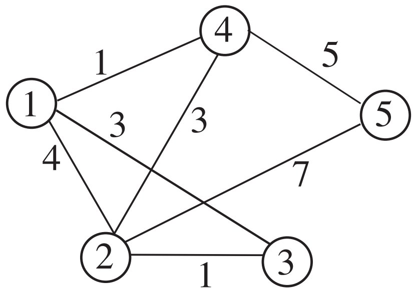
$$x(\alpha) = \bar{x} + \alpha\xi = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + \alpha/2 \\ -\alpha/4 \end{bmatrix}$$

sono ammissibili per $\alpha \geq 0$, come è facile verificare sostituendo nei vincoli, ed il corrispondente valore dells funzione obiettivo

$$cx(\alpha) = [\,2\,,\,0\,] \begin{bmatrix} -2 + \alpha/2 \\ -\alpha/4 \end{bmatrix} = -4 + \alpha$$

cresce al crescere di $\alpha$.

**5)** Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo “Branch and Bound”: l’euristica è l’algoritmo del “vicino più vicino” (nearest neighbour) a partire dal nodo 5 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l’1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell’1-albero (se ve n’è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l’albero delle decisioni è visitato in ampiezza. I figli di ogni nodo nell’albero delle decisioni vengono visitati in ordine lessicografico crescente dei corrispondenti archi fissati a zero (ad esempio, il nodo corrispondente a fissare a zero $\{1, 2\}$ viene visitato prima di quello corrispondente a $\{1, 3\}$). Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**




A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I Il lato $\{2, 4\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano individuato dall’euristica

II L’1-albero di costo minimo calcolato alla radice è un ciclo Hamiltoniano

III Nessuna delle precendenti

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall’algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 10$, $\bar{z} = 17$ II $\underline{z} = 13$, $\bar{z} = +\infty$ III $\underline{z} = 13$, $\bar{z} = 17$

C Su quali variabili l’algoritmo ramifica al nodo radice?

I 3: $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{45}$ II 3: $x_{14}$, $x_{12}$, $x_{13}$ III nessuna (l’algoritmo termina)

D Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per inammissibilità, 1 per ottimalità

II nessuno

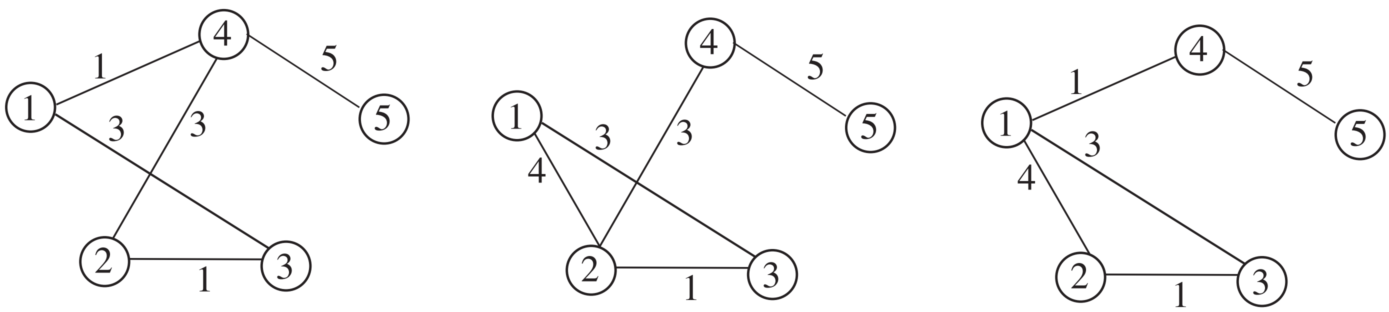
III almeno 1 per la valutazione inferiore

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiore globali $\underline{z} \leq z(P) \leq z$ disponibili quando l’algoritmo ha finito di visitare la radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 14$, $z = +\infty$ II $\underline{z} = 14$, $z = 17$ III $\underline{z} = 16$, $z = 17$

F È possibile modificare il grafo di partenza eliminando un lato in modo tale che l’algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la scelta effettuata.

**Risposta**: Affinché l’algoritmi termini al nodo radice, occorre che l’1-albero di costo minimo calcolato alla radice sia un ciclo Hamiltoniano. Si osservi preliminarmente che è possibile considerare solo i lati incidenti a nodi con grado non inferiore a 2, cioè i lati $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$ e $\{2, 4\}$. In nessuno dei precedenti casi si ottiene un 1-albero di costo minimo che sia anche un ciclo Hamiltoniano, cfr. rispettivamente le Figure (a)-(c).



(a) (b) (c)