1) Anno spaziale 3560. Il Governo Modiale (GM) è sempre più dispotico e totalitario, in mano ad una ristrettissima cerchia di oligarchi. Sorvegliare e punire sono i pilastri della politica securitaria del GM. Contemporaneamente, la popolazione del pianeta Terra è stata decimata dall'ultima guerra inter-spaziale e ormai ridotta a pochi milioni di individui rifugiati in $m \in M$ enclave dette Siti di Insediamento (SdI) controllati dalle invasive costellazioni di droni automatici e completamente autonomi detti piccole stazioni orbitanti (PSO), ovviamente manovrate dai soliti membri del GM, che consentono di osservare tempestivamente e regolarmente tutti i SdI.

I ricchissimi componenti del GM oltre ad essere delle canaglie governative, sono anche spilorci e avidi come pochi e il primo loro obiettivo è minimizzare gli investimenti infrastrutturali richiesti per la sorveglianza globale: in particolare, vogliono impiegare il minor numero possibile di PSO per osservare tutti gli SdI. Inoltre, ogni PSO $i \in S$ deve essere dotata di una sola specifica configurazione tecnologica (CT) $c \in C(i)$ individuata da un'opportuna combinazione di parametri orbitali della PSO. Tecnicamente, la sorveglianza deve essere regolare e periodica: per questo vengono individuati K periodi di osservazione $T(k)$ consecutivi e non sovrapposti per $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, mentre $T = \cup_{k \in K} T(k)$ è l'insieme degli istanti temporali di possibile osservazione. Oltre a decidere quale CT assegnare alla PSO i, occorre definire un angolo θ_i di osservazione per ogni PSO $i \in S$, le cui specifiche tecniche richiedono che appartenga all'intervallo $[\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}]$. Affinché la costellazione sia stabile, il rapporto tra la somma degli angoli di osservazione delle PSO della costellazione e la somma dei loro θ_i^{max} deve essere inferiore ad un valore predefinito $\beta \in (0, 1)$.

Purtroppo per gli abitanti del pianeta Terra, nel cerchio magico dei membri del GM c'è anche un appassionato dilettante di RO, che propone di definire e risolvere un Problema Lineare Intero (PLI) per calcolare qual è il numero minimo di PSO in grado di osservare i SdI almeno una volta in ogni periodo $k \in K$ e come devono essere configurate le PSO in termini di CT e angolo di osservazione. Si scelgano le famiglie di variabili

$$x_{itm} = \begin{cases} 1 & \text{se la PSO } i \text{ osserva il SdI } m \text{ all'istante } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in S \ , \ m \in M \ , \ t \in T$$

$$y_{ic} = \begin{cases} 1 & \text{se la PSO } i \text{ si trova nella CT } c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in S \ , \ c \in C(i)$$

$$\theta_i = \text{l'angolo di osservazione della PSO } i \qquad i \in S$$

Sia Δlat_{icmt} la differenza tra la latitudine del SdI m e della proiezione sulla terra della posizione della PSO i in CT c al tempo t, analogamente $\Delta long_{icmt}$ per la longitudine. Una SdI è osservata da una PSO se e solo se sia Δlat_{icmt} sia $\Delta long_{icmt}$ sono inferiori all'angolo di osservazione della PSO i. Infine un SdI m viene osservato dalla costellazione di PSO se esiste almeno una PSO che lo osserva nell'istante temporale t.

Parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto

$$\begin{array}{lll} \min & \dots & \\ & \sum_{c \in C(i)} y_{ic} \Delta lat_{icmt} \le \theta_i + \pi(1 - x_{itm}) & i \in S \ , \ t \in T \ , \ m \in M \\ & \sum_{c \in C(i)} y_{ic} \Delta log_{icmt} \le \theta_i + 2\pi(1 - x_{itm}) & i \in S \ , \ t \in T \ , \ m \in M \end{array}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $z_i \in \{0, 1\} \quad i \in S$

B SI NO $\sum_{i \in S} \sum_{t \in T(k)} x_{itm} \ge 1 \quad k \in K \ , \ m \in M$

C SI NO $\sum_{t \in T(k)} x_{itm} \le 1 \quad i \in S \ , \ k \in K \ , \ m \in M$

D SI NO $\sum_{t \in T} x_{itm} = 1 \quad i \in S \ , \ m \in M$

E SI NO $\sum_{t \in T} \sum_{i \in S} x_{itm} \ge 1 \quad m \in M$

F SI NO $\sum_{c \in C(i)} y_{ic} \ge 1 \quad i \in S$

G SI NO $\sum_{c \in C(i)} y_{ic} = z_i \quad i \in S$

H SI NO $x_{itm} \leq z_i \qquad i \in S \quad , \quad t \in T \quad , \quad m \in M$

I SI NO $\sum_{t \in T} \sum_{m \in M} x_{itm} \leq z_i \qquad i \in S$

J SI NO $\sum_{t \in T} \sum_{m \in M} x_{itm} \geq z_i \qquad i \in S$

K SI NO $\theta_i^{\min} z_i \leq \theta_i \leq \theta_i^{\max} z_i \qquad i \in S$

L SI NO $\theta_i^{\min} \leq \theta_i \leq \theta_i^{\max} \qquad i \in S$

M SI NO $\sum_{i \in S} (\theta_i / \theta_i^{max}) \, z_i \leq \beta$

N SI NO $\sum_{i \in S} \theta_i \leq \beta \sum_{i \in S} \theta_i^{max}$

O SI NO $\sum_{i \in S} \theta_i \leq \beta \sum_{i \in S} \theta_i^{max} z_i$

P SI NO $\sum_{i \in S} z_i$ (funzione obiettivo)

Q SI NO $\sum_{i \in S} \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} x_{itm}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Si descriva come cambiare la formulazione del problema se, per evitare collisioni tra PSO, si vuole considerare il caso in cui non possono esistere due PSO che osservano lo stesso SdI nello stesso istante temporale.

risposta alla domanda b) Occorre aggiungere il seguente vincolo per imporre che un SdI può essere osservato da al più una PSO in ogni istante temporale.

$$\sum_{i \in S} x_{itm} \leq 1 \qquad t \in T \quad , \quad m \in M$$

2) Sul lontano pianeta *Kevvero-22B*, dal clima sorprendentemente simile a quello terrestre, il continente *Oivopa* è provato da anni di crisi energetiche e tensioni geopolitiche che hanno messo a dura prova la capacità d'acquisto dei cittadini. A seguito di ciò, la *Confederazione dei Paesi Oivopei* ha deciso di mettere in campo politiche a sostegno della popolazione istituendo il *Consorzio per l'Energia Sostenibile e i Trasporti Operativi (Ce.Stò)*, un'organizzazione incaricata di dirigere la produzione, il trasporto e la distribuzione di energia verde.

Per garantire un approvvigionamento efficiente, la Confederazione è stata suddivisa in $e \in E$ regioni energetiche autonome dette *energioni*. Il Ce.Stò deve assicurare che ogni *energione* $e \in E$ riceva esattamente l'energia necessaria d_e^t per trasporti pubblici, industrie locali e servizi civili essenziali in ogni periodo $t \in T = \{1, \dots, |T|\}$ (T è l'orizzonte temporale e $t \in T$ rappresenta un'ora di diversi giorni all'interno dell'orizzonte di tempo prestabilito, dove $|T|$ è multiplo di 10).

Le fonti di energia disponibili, nodi S della rete, producono elettricità che viene direttamente convogliata nella rete per essere distribuita. Le fonti comprendono diversi tipi di impianti, ciascuno con caratteristiche operative peculiari:

- **Centrali idroelettriche**: situate nelle irte valli dei massicci centrali delle *Scarpi*, degli *Scarpazi* e dei *Piedinei*, producono elettricità stabile sfruttando la caduta dell'acqua. Queste centrali $s \in S_{idro}$ richiedono un costo fisso p_s per l'avvio giornaliero. Una volta attivata, la produzione può raggiungere la capacità massima q_s^I (ad ogni ora), e cambiare ogni ora rispetto alle richieste. Il flusso energetico prodootto ha un costo unitario di c_s^I. Com'è noto, il giorno *kevveriano* dura 10 ore, e l'avvio si fa nella prima ora del giorno. La decisione d'avvio si deve prendere nuovamente ogni giorno.
- **Centrali solari**: collocate nelle soleggiate penisole meridionali, producono energia elettrica in base all'irraggiamento dei due soli, *Stenlios* ed *Ellios*, che varia nel tempo durante la giornata. La produzione massima di una centrale $s \in S_{solare}$ dipende dall'irraggiamento al tempo $t \in T$ ed è q_{st}^{II}. I costi di produzione si considerano nulli.
- **Centrali eoliche**: situate nei mari settentrionali, spazzati dai forti e costanti venti *Alisette*. Ogni centrale $s \in S_{eolico}$ può attivare turbine in blocchi discreti $k \in K_s$, ciascuno con capacità massima q_{sk}^{III} e costo di attivazione c_{sk}^{III}. Per esempio: se si decide di attivare il blocco 3, devono essere attivi anche il blocco 1 e 2, in tal caso si pagano tutti i costi: c_{s1}^{III}, c_{s2}^{III} e c_{s3}^{III}. La decisione dell'attivazione di un blocco viene considerata ogni ora $t \in T$, perciò le decisioni delle ore precedenti non influenzano quelle successive. Questa struttura a scaloni permette di modellare l'attivazione progressiva delle turbine.

I nodi della rete $N = S \cup H \cup E$ includono anche gli hub logistici H, dove non c'è né produzione né consumo né stoccaggio. Le connessioni per il trasporto di elettricità $(i, j) \in A \subseteq N \times N$ possono essere attivate con una capacità massima pari a μ_{ij}. Il costo di servizio c_{ij} è proporzionale all'energia trasportata sulla connessione $(i, j) \in A$ in ogni periodo.

Si considerino le variabili non negative g_s^t che indica la produzione di energia della centrale $s \in S_{\text{solare}} \cup S_{\text{idro}}$ al tempo $t \in T$, g_{sk}^t la produzione di energia della centrale $s \in S_{\text{eolico}}$ al tempo $t \in T$ attivando il blocco di turbine $k \in K_s$ e f_{ij}^t la quantità di energia trasportata sull'arco $(i, j) \in A$ al tempo $t \in T$. Le variabili y_{sk}^t e x_{sl} sono binarie. In particolare, $y_{sk}^t = 1$ se un blocco $k \in K_s$ di turbine in una centrale eolica $s \in S_{\text{eolico}}$ in un dato momento $t \in T$ è attivo, 0 altrimenti. x_{sl} prende valore 1 in caso di attivazione giornaliera ($l = 1, \dots, |T|/10$) di una centrale idroelettrica $s \in S_{idro}$, 0 altrimenti.

La funzione obiettivo incompleta è la seguente:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{t\in T} c_{ij} f_{ij}^t + \sum_{s\in S_{\text{idro}}} \sum_{t\in T} c_s^I g_s^t + \dots$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazione il dominio delle famiglie di variabili precedentemente enunciate.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte $\boxed{\text{SI}}$ oppure $\boxed{\text{NO}}$, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $\sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji}^t - \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij}^t = -\sum_{k\in K_i} g_{ik}^t, \quad i \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad t \in T$

B SI NO $\sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji}^t - \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij}^t = -g_{ik}^t, \quad i \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad t \in T \quad , \quad k \in K_i$

C SI NO $$\sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji}^t - \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij}^t = \begin{cases} g_i^t, & i \in S_{\text{solare}} \cup S_{\text{idro}}, \\ d_i^t, & i \in E, \\ 0, & i \in H \end{cases} \quad , \quad t \in T$$

D SI NO $$\sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji}^t - \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij}^t = \begin{cases} -g_i^t, & i \in S_{\text{solare}} \cup S_{\text{idro}}, \\ d_i^t, & i \in E, \\ 0, & i \in H \end{cases} \quad , \quad t \in T$$

E SI NO $0 \le f_{ij}^t \le \mu_{ij} \qquad (i, j) \in A, t \in T$

$\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $0 \leq \sum_{t \in T} f_{ij}^t \leq \mu_{ij} \qquad (i, j) \in A$

$\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\sum_{t \in T} f_{ij}^t = \mu_{ij} \qquad (i, j) \in A$

$\boxed{\text{H}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $q_{sk-1}^{III} \, y_{sk-1}^t \leq g_{sk}^t \leq q_{sk}^{III} \, y_{sk}^t \qquad s \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad k \in K_s \quad , \quad t \in T$
$y_{s,k}^t \geq y_{s,k-1}^t \qquad s \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad k = \{2, \ldots, |K_s|\} \quad , \quad t \in T$

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $0 \leq g_{sk}^t \leq q_{sk}^{III} \, y_{sk}^t \qquad s \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad k \in K_s \quad , \quad t \in T$
$y_{s,k}^t \leq y_{s,k-1}^t \qquad s \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad k = \{2, \ldots, |K_s|\} \quad , \quad t \in T$

$\boxed{\text{J}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $0 \leq g_{sk}^t \leq q_{sk}^{III} \, y_{sk}^t \qquad s \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad k \in K_s \quad , \quad t \in T$
$y_{s,k}^t \geq y_{s,k-1}^t \qquad s \in S_{\text{eolico}} \quad , \quad k = \{2, \ldots, |K_s|\} \quad , \quad t \in T$

$\boxed{\text{K}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $0 \leq g_s^t \leq q_{st}^{II} \qquad s \in S_{\text{solare}} \quad , \quad t \in T$

$\boxed{\text{L}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $g_s^t = q_s^I \, x_{sl} \qquad s \in S_{\text{idro}} \quad , \quad t \in T \quad , \quad l = \lceil t/10 \rceil$

$\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $g_s^t \, x_{sl} = q_s^I \qquad s \in S_{\text{idro}} \quad , \quad t \in T \quad , \quad l = \lceil t/10 \rceil$

$\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $g_s^t \, x_{sl} \leq q_s^I \qquad s \in S_{\text{idro}} \quad , \quad t \in T \quad , \quad l = \{1, \ldots, 10\}$

$\boxed{\text{O}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\ldots + \sum_{s \in S_{\text{idro}}} \sum_{l=1}^{|T|} p_s \, x_{sl} + \sum_{s \in S_{\text{solare}}} \sum_{t \in T} g_s^t + \sum_{s \in S_{\text{eolico}}} \sum_{k \in K_s} \sum_{t \in T} c_{sk}^{III} \, y_{sk}^t$ (funzione obiettivo)

$\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\ldots + \sum_{s \in S_{\text{idro}}} \sum_{l=1}^{|T|} p_s \, x_{sl} + \sum_{s \in S_{\text{eolico}}} \sum_{k \in K_s} \sum_{t \in T} c_{sk}^{III} \, y_{sk}^t$ (funzione obiettivo)

$\boxed{\text{Q}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\ldots + \sum_{s \in S_{\text{idro}}} \sum_{l=1}^{|T|/10} p_s \, x_{sl} + \sum_{s \in S_{\text{solare}}} \sum_{t \in T} g_s^t + \sum_{s \in S_{\text{eolico}}} \sum_{k \in K_s} \sum_{t \in T} c_{sk}^{III} \, y_{sk}^t$ (funzione obiettivo)

$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\ldots + \sum_{s \in S_{\text{idro}}} \sum_{l=1}^{|T|/10} p_s \, x_{sl} + \sum_{s \in S_{\text{eolico}}} \sum_{k \in K_s} \sum_{t \in T} c_{sk}^{III} \, y_{sk}^t$ (funzione obiettivo)

domanda b) Dopo lunghe trattative per la fornitura delle condotte, il Consorzio Ce.Stò ha stretto un accordo con la storica *Unione Tuberie* (U-Tub), protagonista del settore. La *U-Tub* offre un ventaglio di possibili connessioni $u \in U$, ciascuna con capacità prefissata μ^u ad un costo fisso F^u. Si aggiorni il modello con la nuova specifica.

risposta alla domanda b) In tal caso, per ogni arco $(i, j) \in A$ si introducono variabili binarie z_{ij}^u, che valgono 1 se la connessione di tipo $u \in U$ viene installata. Il vincolo di capacità $\boxed{\text{E}}$ diventa

$$0 \leq f_{ij}^t \leq \sum_{u \in U} \mu^u \, z_{ij}^u \qquad (i, j) \in A \quad , \quad t \in T$$

e occorre aggiungere il vincolo logico

$$\sum_{u \in U} z_{ij}^u \leq 1 \qquad (i, j) \in A \quad .$$

La funzione obiettivo si aggiorna con il termine

$$\sum_{(i, j) \in A} \sum_{u \in U} F^u \, z_{ij}^u .$$