Appello Straordinario di MDAL
3 novembre 2016

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Determinare il numero di soluzioni della congruenza

$$5^{x+3} = 4 \pmod{11}$$

nell'intervallo $[-30, 50]$.

Calcolo il valore delle potenze di x modulo 11

$5^0 = 1 \quad 5^1 = 5 \quad 5^2 = 3 \quad \underline{5^3 = 4} \quad 5^4 = -2 \quad 5^5 = 1$

$\Rightarrow 4 = 5^3$ e ord $5 = 5$

L'eq diventa $\quad 5^{x+3} \equiv 5^3 \quad (11)$

da cui $\quad x+3 \equiv 3 \quad (5)$

$x \equiv 0 \quad (5)$

$x = 5t \quad t \in \mathbb{Z}$

$-30 \leq 5t \leq 50 \iff -6 \leq t \leq 10$

Nell' intervallo considerato ci sono 17 soluzioni.

Esercizio 2.
Calcolare il numero di matrici invertibili 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, giustificando opportunamente la risposta.

Risolvo il problema in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo qualsiasi

1° metodo:

$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $\det M = ad - bc \neq 0$

Conto separatamente le matrici invertibili M con $a \neq 0$ e con $a = 0$

$\boxed{a \neq 0}$ $\det M \neq 0 \Leftrightarrow d \neq bc\,a^{-1}$

(se $a \neq 0$ a è invertibile in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

In questo caso la condizione di invertibilità esclude un valore di d e non mette condizioni su b e c

$p-1$ valori possibili per a e per d

p // // // b e per c

$\Rightarrow$ # matrici invertibili con $a \neq 0 = p^2(p-1)^2$

$\boxed{a = 0}$ $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\det M = -bc \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$ e $c \neq 0$

M è invertibile $\Leftrightarrow b \neq 0, c \neq 0$ (d può essere qualsiasi)

$(p-1)$ valori possibili per b e per c $\Rightarrow p(p-1)^2$ matrici inv.

p valori possibili per d

In Totale: $p^2(p-1)^2 + p(p-1)^2 = p(p-1)^2(p+1)$

2° metodo

$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è invertibile in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti

$\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Per $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ho p^2-1 scelte possibili

(Tutti i vettori di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2$ eccetto ~~il~~ vett. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

per $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ho la condizione $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\forall \lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Poiché i vettori $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sono p vettori distinti

per $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ho p^2-p scelte possibili

Posso scegliere la matrice in $(p^2-1)(p^2-p)$ modi

$$(p^2-1)(p^2-p) = p(p+1)(p-1)^2$$

$\rightarrow$

Esercizio 3. Dare un esempio di una matrice 2×2 su $\mathbb{R}$ diagonalizzabile ma non diagonale, e di una non diagonalizzabile, giustificando le risposte.

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile, in quanto

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1-x)^2 - 1 = x^2 - 2x$$

ha soluzioni 0 e 2, entrambe con $m_a(\lambda_i) = 1$

e quindi $m_g(\lambda_i) = 1$.

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ non è diagonalizzabile, in quanto

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1-x)^2$$

ha una soluzione $x_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2, ma

~~[illegible]~~ $\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha dimensione 1,

e quindi $m_g(1) = 1$.

Esercizio 4. Si indichi con $\mathbb{R}[x]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 2.
Sia $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ l'applicazione lineare che manda il polinomio $p(x)$ in $p(0)x^2 + p(1)$.
a. Si scelga una base di $\mathbb{R}[x]_2$, e si scriva la matrice associata a T utilizzando questa base sia in partenza che in arrivo.
b. Si trovi una base di $\operatorname{Im} T$. Qual è la dimensione di questo spazio?
c. Si trovi una base di $\operatorname{Ker} T$. Qual è la dimensione di questo spazio?

a.) Scegliamo la base $B = (x^2; x; 1)$:

$$T(x^2) = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot 1 = 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$$

$$T(x) = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot 1 = 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$$

$$T(1) = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 1 = x^2 + 1 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$$

Quindi la matrice associata a T è $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (rispetto alla base B).

b.) $A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ci sono due pivot nella 1° e 3ª colonna, quindi una base di $\operatorname{Im} A$ è $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Una base di $\operatorname{Im} T$ si ottiene prendendo i polinomi con coordinate $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, cioè $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$ e $1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$.

Risposta: $(1; x^2+1)$. $\dim \operatorname{Im} T = 2$

c.) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$

Una base di $\operatorname{Ker} T$ si ottiene prendendo il polinomio che ha per coordinate $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, cioè $(x^2 - x)$.

$\operatorname{Dim} \operatorname{Ker} T = 1.$