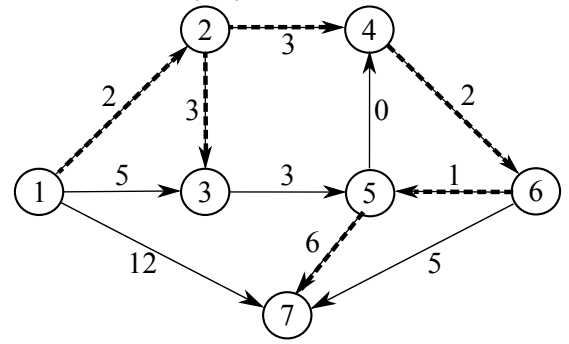


1) Per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I Sostituendo l'arco $(2, 4)$ con l'arco $(3, 5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [0, 2, 5, 5, 8, 7, 14]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 17

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire una buona numerazione che lo dimostra.

I No

II Sì: $[1, 4, 3, 5, 2, 6, 7]$

III Sì: $[6, 1, 4, 5, 2, 7, 3]$

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(1, 7), (5, 4)\}$

II $\{(1, 7), (6, 7)\}$

III $\{(1, 3), (6, 7)\}$

D Quali archi si possono sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(5, 7), (2, 3)$ con $(6, 7), (1, 3)$

II $(5, 7)$ con $(6, 7)$

III entrambe le precedenti sono corrette

E Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 21

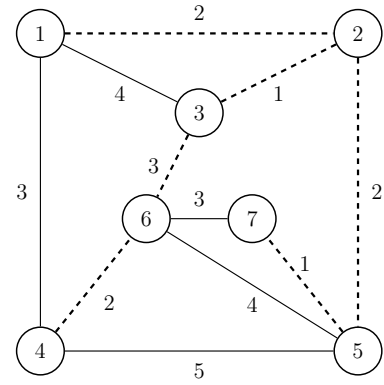
II 39

III 45

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi dell'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi, mantenendo i costi non negativi. Modificare poi il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte, basta modificare, tra gli archi dell'albero, $c_{57} \leq 4$, oppure, tra gli archi fuori dall'albero, $c_{17} \geq 14$ e $c_{67} \geq 7$.

2) Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero T sono corrette:

I Sostituendo il lato $\{4, 6\}$ con il lato $\{1, 4\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esistono esattamente altri due alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quale lato non soddisfa la condizione di ottimalità per i tagli:

I nessuno

II $\{4, 6\}$

III $\{2, 5\}$

C Per quali cicli il lato $\{1, 4\}$ soddisfa la condizione di ottimalità per cicli:

I $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

II $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

III entrambi

D Quali sostituzioni di lati bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo:

I $\{4, 6\}$ con $\{1, 4\}$

II $\{6, 7\}$ con $\{5, 6\}$

III nessuno

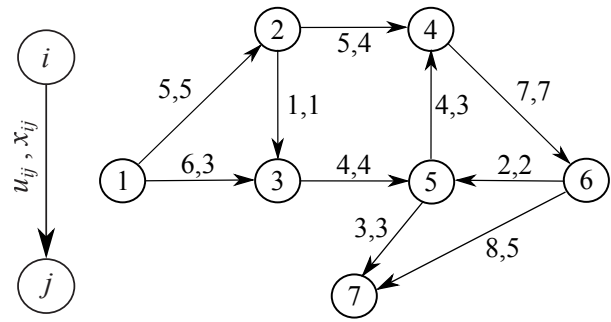
E Sia il parametro positivo α il nuovo costo del lato $\{2, 3\}$. Per quali valori di α non si rispettano più le condizioni di ottimalità? Giustificare la risposta.

Risposta: Si può ottenere lo stesso risultato valutando le condizioni di ottimalità per tagli o per cicli:

- **Condizione di ottimalità per i tagli:** Rimuovendo l'arco $\{2, 3\}$ dell'albero si ottengono le due componenti $S = \{1, 2, 5, 7\}$ e il complementare di V , $V \setminus S = \{3, 6, 4\}$. La condizione per tagli richiede che il costo del lato dell'albero sia il minimo tra quelli che attraversano il taglio, cioè $\alpha \leq \min\{4, 3\} = 3$. Quindi la condizione per i tagli viene violata se e solo se $\alpha > 3$.
- **Condizione di ottimalità per i cicli:** Bisogna considerare gli archi fuori dall'albero che, aggiunti, formano un ciclo contenente $\{2, 3\}$. Gli archi esterni, il cui percorso unico in T tra i loro estremi passa per $\{2, 3\}$, sono: $\{1, 3\}$ con $c_{13} = 4$, $\{1, 4\}$ con $c_{14} = 3$, $\{5, 6\}$ con $c_{56} = 4$, $\{6, 7\}$ con $c_{67} = 3$, e $\{4, 5\}$ con $c_{45} = 5$. Se esiste un lato esterno con costo inferiore a quello del lato dell'albero che compare nel ciclo, allora tale lato dell'albero viola la condizione di ottimalità dei cicli. Quindi basta trovare il minimo dei costi dei lati esterni che generano un ciclo contenente $\{2, 3\}$; se α è maggiore del minimo costo, il lato viola la condizione. Il minimo tra $\{4, 3, 4, 3, 5\}$ è 3 (per esempio, gli archi $\{1, 4\}$ e $\{6, 7\}$ hanno costo 3). Dunque anche per i cicli la violazione si verifica quando $\alpha > 3$.

Se $\alpha = 3$ non c'è violazione: si ha parità di costi, quindi al più si ottiene un altro albero di ugual costo ma non una violazione delle condizioni di ottimalità.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 ed il corrispondente flusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

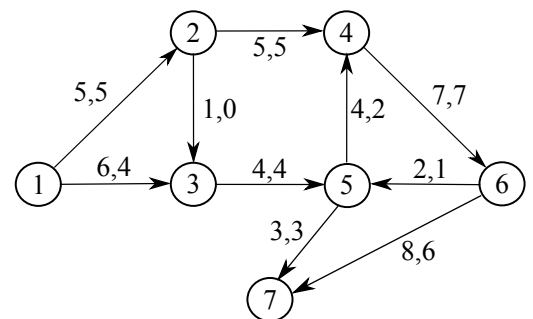


- A** Il flusso mostrato è:
- I** ammissibile di valore 8 **II** ammissibile di valore 11 **III** non ammissibile
- B** Ponendo $x_{67} = 8$ si ottiene un flusso:
- I** ammissibile di valore 8 **II** ammissibile di valore 11 **III** non ammissibile
- C** Considerando il flusso ammissibile di valore più alto tra quelli descritti nei due punti precedenti, quale dei seguenti cammini è aumentante per il problema di flusso massimo:
- I** $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ **II** $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ **III** entrambi
- D** Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) mostra che il valore del flusso massimo non può essere superiore a 11:
- I** $N_t = \{5, 6, 7\}$ **II** $N_s = \{1\}$ **III** entrambi
- E** Quale dei seguenti tagli (N_s, N_t) è saturo:
- I** $N_s = \{1\}$ **II** $N_t = \{6, 7\}$ **III** nessuno dei due
- F** A partire dal flusso ammissibile di valore massimo noto dai punti precedenti si esegua l'algoritmo di Edmonds&Karp: il numero di iterazioni (visite del grafo residuo) necessarie per terminare è:
- I** 1 **II** 2 **III** 3
- G** Con riferimento all'esecuzione di cui alla domanda precedente, il taglio (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo è:
- I** $N_t = \{1, 2, 4\}$ **II** $N_s = \{1, 3\}$ **III** entrambi
- H** Si discuta quale sia il minimo numero di archi dei quali è necessario aumentare la capacità affinché il valore del flusso massimo aumenti strettamente. Giustificare la risposta.

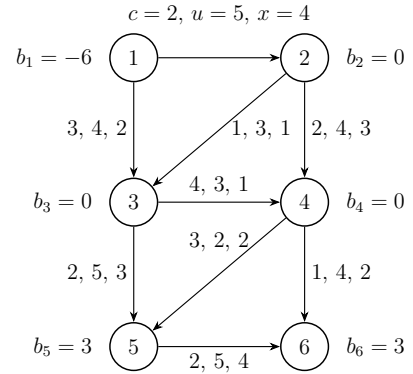
Risposta: Il flusso ottimo, di valore $v = 9$, è mostrato nella figura qui accanto. È ottenuto dal flusso ammissibile dato (si veda **B**), inviando una unità di flusso lungo il cammino $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$, che è aumentante (si veda **C**). Ciò richiede un'iterazione, ma l'algoritmo deve eseguire anche una seconda visita del grafo residuo (si veda **F**), che non trova cammini aumentanti ma individua il taglio $T = (N_s, N_t)$, con $N_s = \{1, 3\}$ (si veda **G**), di capacità

$$u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{35} = 5 + 4 = 9,$$

che è saturo e quindi è il taglio di capacità minima. Questo non è l'unico taglio di capacità minima: infatti, anche $T' = (N'_s, N'_t)$ con $N'_s = \{1, 2, 3\}$ è saturo ed ha capacità 9. Si noti che la risposta **II** ad **E** è negativa in quanto nel flusso dato l'arco $(6, 7)$, inverso nei tagli, non è vuoto. Poiché gli insiemi degli archi dei tagli T e T' hanno in comune l'arco $\{3, 5\}$ è possibile aumentare il valore di tutti i tagli di capacità minima aumentando solamente la capacità di quest'arco; pertanto il numero minimo è uno.



4) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura (si noti che per ogni arco si riportano il costo c , la capacità u e il valore del flusso x , in quest'ordine, come esplicitato sull'arco (1,2)), si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A) Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I [6, 0, 0, 0, -3, -3]

II [0, 0, 0, 0, 0, 0]

III [0, 0, -1, 0, -2, 3]

B) Il costo totale dello pseudoflusso x è:

I 47

II 50

III 74

C) Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

II $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

III nessuno dei precedenti

D) Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

II $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

III entrambi

E) Quale dei seguenti cicli ha costo negativo:

I $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

II $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

III $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

F) Si dica se lo pseudoflusso x è minimale; altrimenti, si indichi come costruirne uno minimale per lo stesso vettore di sbilanciamenti. Si indichi il valore dello pseudoflusso ottenuto e si dimostri che è minimale. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso non è minimale perché esistono:

- il ciclo $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ con costo negativo (-3) che è aumentante, in quanto ha capacità 1;
- il ciclo $5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ con costo negativo (-4) che è aumentante, in quanto ha capacità 2.

Dopo aver applicato i cicli di costo negativo, il costo dello pseudoflusso passa da 47 a:

$$47 - 3(1) - 4(2) = 36.$$

Si riporta di seguito il nuovo grafo residuo pesato. Non esistono cicli orientati di costo negativo sul grafo residuo pesato, poiché si può ottenere l'albero dei cammini minimi dai vertici con sbilanciamento positivo. L'albero dei cammini minimi è rappresentato dagli archi tratteggiati. Sui nodi sono riportate le etichette.

