Nome: **Cognome:** **Matricola:**

1) A seguito dell'aumento degli utenti, un'azienda di trasporto pubblico (ATP) regionale ha la necessità di riorganizzare la propria flotta di veicoli, sia in termini di numero e capacità dei veicoli, sia di rotte percorse. La rete di servizio dell'ATP può essere rappresentata da un grafo orientato $G(N_0, A)$, con $N_0 = N \cup \{ 0 , n+1 \}$, in cui i nodi N rappresentano le $n = |N|$ città servite dall'ATP (con la convenzione che i nodi 0 e $n+1$ indicano la rimessa dei veicoli rispetto alla quale un veicolo deve necessariamente iniziare e finire il suo tragitto giornaliero in modo tale che tutti i tragitti partano dal nodo 0 e terminino nel nodo $n+1$) e gli archi costituiscono i possibili collegamenti tra le città.

L'obiettivo dell'ATP consiste nell'assicurare i collegamenti tra le città N rispettando tutti i vincoli di servizio, al costo minimo. In particolare:

- la puntualità: il tempo di arrivo in ogni città $i \in N$ deve avvenire rigorosamente nella finestra temporale $[a_i, b_i]$, dove a_i e b_i indicano rispettivamente l'istante iniziale e finale della finestra temporale (il tempo di arrivo della città i deve tener conto dei tempi medi t_{ij} di percorrenza tra la città j visitata precedentemente e la città i);
- il comfort: ogni veicolo ha un bagagliaio di capacità Q dove riporre le valigie dei passeggeri (si stima che il volume dei bagagli dipenda in prima approssimazione dall'utenza media relativa a una città, pertanto il carico del veicolo dopo essere partito dalla città $i \in N$ è pari al carico di arrivo più il numero medio q_i di valige caricate durante la fermata alla città i).

Inoltre, è noto il numero massimo L di persone che ciascun veicolo può ospitare. Ogni veicolo deve avere una capienza idonea a ospitare almeno il numero U_i di utenti del servizio, che, si stima, saliranno in ogni città $i \in N$. Si assuma che i passeggeri scendano tutti alla fine del tragitto. Inoltre, ogni città deve necessariamente essere visitata una e una sola volta. Si indichi con $T_{\max}$ la durata totale del servizio giornaliero dell'ATP.

I costi da minimizzare devono necessariamente tenere conto dei costi associati alla dimensione l di ciascun veicolo (il costo unitario per dimensione è indicato con f_I) e dei costi variabili legati alla distanza d_{ij} tra le coppie di città collegate (il costo unitario per chilometro percorso è indicato con c_v).

Si scelgano le famiglie di variabili

$$x_{ijl} = \begin{cases} 1 & \text{se un veicolo viaggia dalla città } i \text{ alla città } j \text{ con una capacità residua di } l \text{ persone} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i, j) \in A \ , \ l \in \{1, \ldots, L\}$$

$$u_i = \text{carico del veicolo dopo essere partito dalla città } i \qquad i \in N_0$$

$$w_i = \text{istante di arrivo del veicolo nella città } i \qquad i \in N_0$$

con la convenzione che $u_0 = w_0 = 0$. La formulazione è data da un problema di minimizzazione

$$\begin{aligned} \min \ & \ldots \\ & \ldots \end{aligned}$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} x_{ijl} = 1 \qquad j \in N$

B SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} x_{ijl} = l \qquad j \in N$

C SI NO $\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ijl} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji(l-U_j)} \qquad j \in N \ , \ l \in \{U_j, \ldots, L\}$

D SI NO $\sum_{i\in N} x_{0il} = \sum_{i\in N} x_{i(n+1)l} \qquad l \in \{1, \ldots, L\}$

E SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} x_{ijl} = 1 \qquad j \in N_0 \ , \ l \in \{1, \ldots, L\}$

F SI NO $\sum_{j:(j,i)\in A} x_{jil} = 1 \qquad j \in N_0 \ , \ l \in \{1, \ldots, L\}$

G SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} l x_{ijl} \le U_j \qquad j \in N$

H SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} l x_{ijl} \ge U_j \qquad j \in N$

I SI NO $\sum_{i:(\,i\,,\,j\,)\in A} \sum_{l\in\{\,1,\ldots,L\,\}} x_{ijl} \geq U_j \qquad j \in N$

J SI NO $u_j \geq u_i + q_j - Q\left(1 - \sum_{l\in\{\,1,\ldots,L\,\}} x_{ijl}\right) \qquad (\,i\,,\,j\,) \in A$

K SI NO $u_j \geq u_i + q_j \qquad (\,i\,,\,j\,) \in A$

L SI NO $q_i \geq u_i \geq Q \qquad i \in N$

M SI NO $q_i \leq u_i \leq Q \qquad i \in N$

N SI NO $w_i \geq w_j + t_{ij} \qquad (\,i\,,\,j\,) \in A$

O SI NO $w_j \geq w_i + t_{ij} - T_{\max}\left(1 - \sum_{l\in\{\,1,\ldots,L\,\}} x_{ijl}\right) \qquad (\,i\,,\,j\,) \in A$

P SI NO $a_i \leq w_i \leq b_i \qquad i \in N_0$

Q SI NO $c_v \sum_{(\,i\,,\,j\,)\in A} d_{ij} x_{ijl}$ (funzione obiettivo)

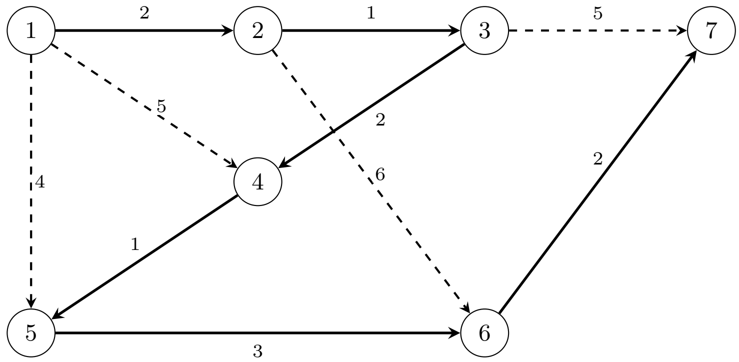
R SI NO $\sum_{j\in N} \sum_{l\in\{\,1,\ldots,L\,\}} l f_I x_{0jl} + c_v \sum_{(\,i\,,\,j\,)\in A} d_{ij} x_{ijl}$ (funzione obiettivo)

S SI NO $\sum_{j\in N} \sum_{l\in\{\,1,\ldots,L\,\}} f_I x_{0jl} + c_v \sum_{(\,i\,,\,j\,)\in A} d_{ij} x_{ijl}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Si descriva come modificare la formulazione del problema se si vuole considerare anche un costo fisso f_v associato a ogni veicolo, che, insieme agli altri costi già presenti nella formulazione, si vuole minimizzare.

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

2) Per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 e la corrispondente soluzione (archi pieni) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



$\boxed{\text{A}}$ Quale delle seguenti affermazioni sul grafo e sull'albero evidenziato è corretta?

$\boxed{\text{I}}$ Sostituendo l'arco $(3, 4)$ con l'arco $(1, 4)$ non si ottiene un albero dei cammini con lo stesso costo totale di quello dato.
$\boxed{\text{II}}$ I nodi sono numerati in ordine lessicografico.
$\boxed{\text{III}}$ Il grafo non è aciclico.

$\boxed{\text{B}}$ Il vettore delle etichette dell'albero mostrato in figura è:

$\boxed{\text{I}}$ $d = [0, 2, 3, 4, 5, 7, 11]$ $\boxed{\text{II}}$ $d = [0, 2, 3, 5, 6, 9, 11]$ $\boxed{\text{III}}$ $d = [0, 2, 3, 5, 4, 7, 8]$

$\boxed{\text{C}}$ Il costo dell'albero mostrato in figura è:

$\boxed{\text{I}}$ 11 $\boxed{\text{II}}$ 29 $\boxed{\text{III}}$ 36

$\boxed{\text{D}}$ Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(1, 4), (2, 6)\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(1, 5), (3, 7)\}$

$\boxed{\text{E}}$ Qual è il minor numero di archi da sostituire nell'albero dato per ottenere un albero dei cammini minimi?

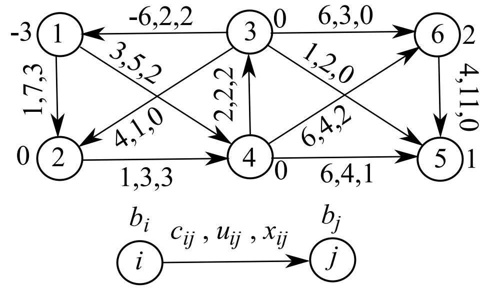
$\boxed{\text{I}}$ 1 $\boxed{\text{II}}$ 2 $\boxed{\text{III}}$ 3

$\boxed{\text{F}}$ Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

$\boxed{\text{I}}$ 8 $\boxed{\text{II}}$ 17 $\boxed{\text{III}}$ 29

$\boxed{\text{G}}$ Preso l'albero indotto dai soli nodi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, si modifichi il minor numero di archi dell'albero dato affinché sia l'unico albero dei cammini minimi. Si giustifichi la risposta.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[3, 0, 0, 0, 1, 2]$ II $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$ III $[-1, 0, 2, 0, 1, 0]$

B Il costo totale dello pseudoflusso x è:

I 22 II 24 III 52

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$ II $3 \to 2 \to 4 \to 3$ III nessuno dei precedenti

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 5$ II $1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 5$ III nessuno dei precedenti

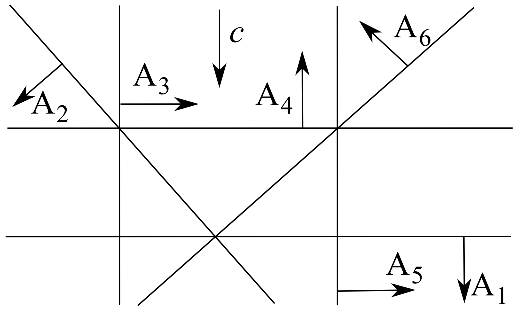
E Quale dei seguenti cicli ha costo negativo:

I $1 \to 4 \to 2 \to 1$ II $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$ III entrambi i precedenti

F Si dica se lo pseudoflusso x è minimale; altrimenti, si indichi come costruirne uno minimale per lo stesso vettore di sbilanciamenti. Si indichi il valore dello pseudoflusso ottenuto e si dica se è ottimo. Giustificare tutte le risposte.

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c, A_1 ed A_4 sono collineari tra loro, ed anche A_3 ed A_5 lo sono. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Per $B = \{2, 3\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III nessuna delle due cose

B Per $B = \{1, 3\}$ si può affermare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale degenere III entrambe le cose

C Per $B = \{1, 2\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose

D Per $B = \{3, 5\}$ si può affermare che

I non è una base II è una base duale degenere III nessuna delle due cose

E Per $B = \{1, 3\}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Per $B = \{1, 5\}$, l'indice entrante è

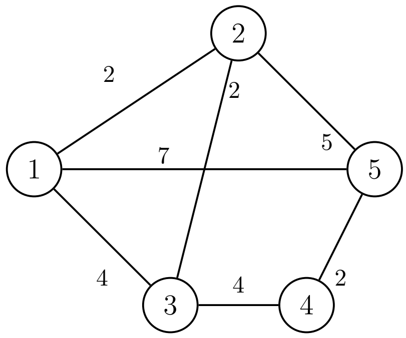
I $k = 2$ II $k = 3$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Per $B = \{1, 5\}$, dato l'indice entrante stabilito alla domanda precedente, l'indice uscente è

I $h = 1$ II $h = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{1, 5\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte. Al termine, nel caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primale e duale ottenute. Giustificare tutte le risposte.

5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo (TSP) sul grafo pesato di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal vertice 1 (in caso di parità si scelga il nodo con indice minore) ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo (MS1T) come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando il vertice con il maggior numero di lati incidenti nella soluzione dell'MS1T, fissando a zero la variabile corrispondente a tali lati. Si visita breadth-first (a ventaglio) l'albero delle decisioni, ossia si implementa Q come una fila, e si inseriscono in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di lati fissati a zero. Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I il lato $\{1, 5\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano calcolato dall'euristica.

II l'1-albero di costo minimo calcolato al nodo radice è un ciclo hamiltoniano.

III entrambe le precedenti sono corrette.

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\overline{z}$ al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = 17$ II $\underline{z} = 17$, $\overline{z} = 17$ III $\underline{z} = 15$, $\overline{z} = 18$

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I x_{13}, x_{23}, x_{34} II x_{12}, x_{23}, x_{34} III nessuna (l'algoritmo termina)

D Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I almeno un nodo viene chiuso per valutazione inferiore

II nessun nodo viene chiuso per inammissibilità

III almeno un nodo viene chiuso per ottimalità

E Quali sono le migliori valutazioni inferiore e superiore dopo aver visitato il nodo radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 17$, $\overline{z} = 17$ II $\underline{z} = 15$, $\overline{z} = 17$ III $\underline{z} = 15$, $\overline{z} = 18$

F Si valuti il costo del lato $\{2, 3\}$. Di quanto e come dovrebbe essere modificato affinché l'algoritmo termini con una soluzione ottima al nodo radice?