1) A seguito dell'aumento degli utenti, un'azienda di trasporto pubblico (ATP) regionale ha la necessità di riorganizzare la propria flotta di veicoli, sia in termini di numero e capacità dei veicoli, sia di rotte percorse. La rete di servizio dell'ATP può essere rappresentata da un grafo orientato $G(N_0, A)$, con $N_0 = N \cup \{ 0 , n+1 \}$, in cui i nodi N rappresentano le $n = |N|$ città servite dall'ATP (con la convenzione che i nodi 0 e $n+1$ indicano la rimessa dei veicoli rispetto alla quale un veicolo deve necessariamente iniziare e finire il suo tragitto giornaliero in modo tale che tutti i tragitti partano dal nodo 0 e terminino nel nodo $n+1$) e gli archi costituiscono i possibili collegamenti tra le città.

L'obiettivo dell'ATP consiste nell'assicurare i collegamenti tra le città N rispettando tutti i vincoli di servizio, al costo minimo. In particolare:

- la puntualità: il tempo di arrivo in ogni città $i \in N$ deve avvenire rigorosamente nella finestra temporale $[a_i, b_i]$, dove a_i e b_i indicano rispettivamente l'istante iniziale e finale della finestra temporale (il tempo di arrivo della città i deve tener conto dei tempi medi t_{ij} di percorrenza tra la città j visitata precedentemente e la città i);

- il comfort: ogni veicolo ha un bagagliaio di capacità Q dove riporre le valigie dei passeggeri (si stima che il volume dei bagagli dipenda in prima approssimazione dall'utenza media relativa a una città, pertanto il carico del veicolo dopo essere partito dalla città $i \in N$ è pari al carico di arrivo più il numero medio q_i di valige caricate durante la fermata alla città i).

Inoltre, è noto il numero massimo L di persone che ciascun veicolo può ospitare. Ogni veicolo deve avere una capienza idonea a ospitare almeno il numero U_i di utenti del servizio, che, si stima, saliranno in ogni città $i \in N$. Si assuma che i passeggeri scendano tutti alla fine del tragitto. Inoltre, ogni città deve necessariamente essere visitata una e una sola volta. Si indichi con $T_{\max}$ la durata totale del servizio giornaliero dell'ATP.

I costi da minimizzare devono necessariamente tenere conto dei costi associati alla dimensione l di ciascun veicolo (il costo unitario per dimensione è indicato con f_I) e dei costi variabili legati alla distanza d_{ij} tra le coppie di città collegate (il costo unitario per chilometro percorso è indicato con c_v).

Si scelgano le famiglie di variabili

$$x_{ijl} = \begin{cases} 1 & \text{se un veicolo viaggia dalla città } i \text{ alla città } j \text{ con una capacità residua di } l \text{ persone} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i, j) \in A \ , \ l \in \{1, \ldots, L\}$$

$$u_i = \text{carico del veicolo dopo essere partito dalla città } i \qquad i \in N_0$$

$$w_i = \text{istante di arrivo del veicolo nella città } i \qquad i \in N_0$$

con la convenzione che $u_0 = w_0 = 0$. La formulazione è data da un problema di minimizzazione

$$\min \ \ldots$$
$$\ldots$$

Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} x_{ijl} = 1 \qquad j \in N$

B SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} x_{ijl} = l \qquad j \in N$

C SI NO $\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ijl} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji(l-U_j)} \qquad j \in N \ , \ l \in \{U_j, \ldots, L\}$

D SI NO $\sum_{i\in N} x_{0il} = \sum_{i\in N} x_{i(n+1)l} \qquad l \in \{1, \ldots, L\}$

E SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} x_{ijl} = 1 \qquad j \in N_0 \ , \ l \in \{1, \ldots, L\}$

F SI NO $\sum_{j:(j,i)\in A} x_{jil} = 1 \qquad j \in N_0 \ , \ l \in \{1, \ldots, L\}$

G SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} l x_{ijl} \leq U_j \qquad j \in N$

H SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\ldots,L\}} l x_{ijl} \geq U_j \qquad j \in N$

I SI NO $\sum_{i:(i,j)\in A} \sum_{l\in\{1,\dots,L\}} x_{ijl} \geq U_j \qquad j \in N$

J SI NO $u_j \geq u_i + q_j - Q\left(1 - \sum_{l\in\{1,\dots,L\}} x_{ijl}\right) \qquad (i,j) \in A$

K SI NO $u_j \geq u_i + q_j \qquad (i,j) \in A$

L SI NO $q_i \geq u_i \geq Q \qquad i \in N$

M SI NO $q_i \leq u_i \leq Q \qquad i \in N$

N SI NO $w_i \geq w_j + t_{ij} \qquad (i,j) \in A$

O SI NO $w_j \geq w_i + t_{ij} - T_{\max}\left(1 - \sum_{l\in\{1,\dots,L\}} x_{ijl}\right) \qquad (i,j) \in A$

P SI NO $a_i \leq w_i \leq b_i \qquad i \in N_0$

Q SI NO $c_v \sum_{(i,j)\in A} d_{ij} x_{ijl}$ (funzione obiettivo)

R SI NO $\sum_{j\in N} \sum_{l\in\{1,\dots,L\}} l f_I x_{0jl} + c_v \sum_{(i,j)\in A} d_{ij} x_{ijl}$ (funzione obiettivo)

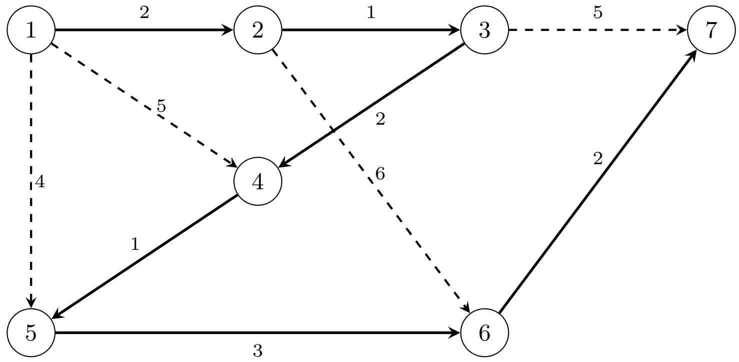
S SI NO $\sum_{j\in N} \sum_{l\in\{1,\dots,L\}} f_I x_{0jl} + c_v \sum_{(i,j)\in A} d_{ij} x_{ijl}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Si descriva come modificare la formulazione del problema se si vuole considerare anche un costo fisso f_v associato a ogni veicolo, che, insieme agli altri costi già presenti nella formulazione, si vuole minimizzare.

risposta alla domanda b) Occorre modificare la funzione obiettivo aggiungendo il seguente termine.

$$\sum_{j\in N} \sum_{l\in\{1,\dots,L\}} f_v x_{0jl}$$

2) Per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 e la corrispondente soluzione (archi pieni) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni sul grafo e sull'albero evidenziato è corretta?

I Sostituendo l'arco $(3,4)$ con l'arco $(1,4)$ non si ottiene un albero dei cammini con lo stesso costo totale di quello dato.
II I nodi sono numerati in ordine lessicografico.
III Il grafo non è aciclico.

B Il vettore delle etichette dell'albero mostrato in figura è:

I $d = [0,2,3,4,5,7,11]$ II $d = [0,2,3,5,6,9,11]$ III $d = [0,2,3,5,4,7,8]$

C Il costo dell'albero mostrato in figura è:

I 11 II 29 III 36

D Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(1,4),(2,6)\}$ II $\{(1,5),(2,6),(3,7)\}$ III $\{(1,5),(3,7)\}$

E Qual è il minor numero di archi da sostituire nell'albero dato per ottenere un albero dei cammini minimi?

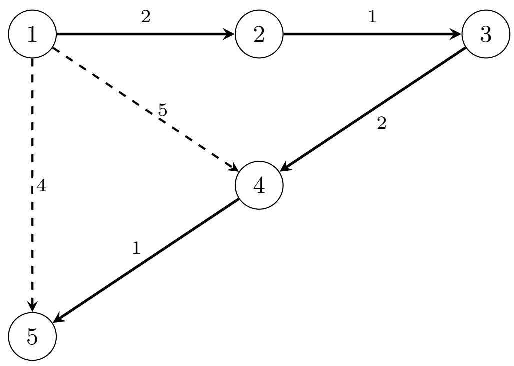
I 1 II 2 III 3

F Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

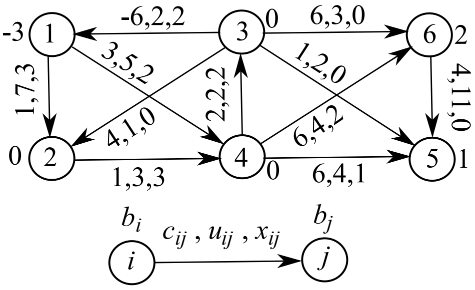
I 8 II 17 III 29

G Preso l'albero indotto dai soli nodi $\{1,2,3,4,5\}$, si modifichi il minor numero di archi dell'albero dato affinché sia l'unico albero dei cammini minimi. Si giustifichi la risposta.

Risposta: Dato il grafo ridotto riportato a fianco, diminuendo il costo di uno degli archi tra $(1,2)$, $(2,3)$ e $(3,4)$ di 3 unità (per esempio, ponendo $c_{12} = -1$) otterremmo che quello dato è l'albero dei cammini minimi e non ci sarebbero soluzioni coincidenti, in quanto tutti gli archi soddisferebbero le condizioni di Bellman in modo stretto.



3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[3,0,0,0,1,2]$ II $[0,0,0,0,0,0]$ III $[-1,0,2,0,1,0]$

B Il costo totale dello pseudoflusso x è:

I 22 II 24 III 52

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$ II $3 \to 2 \to 4 \to 3$ III nessuno dei precedenti

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $2 \to 1 \to 3 \to 5$ II $1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 5$ III nessuno dei precedenti

E Quale dei seguenti cicli ha costo negativo:

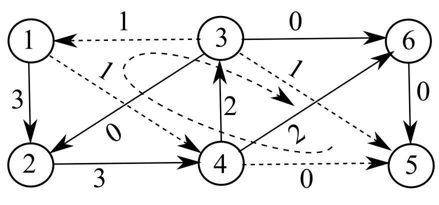
I $1 \to 4 \to 2 \to 1$ II $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$ III entrambi i precedenti

F Si dica se lo pseudoflusso x è minimale; altrimenti, si indichi come costruirne uno minimale per lo stesso vettore di sbilanciamenti. Si indichi il valore dello pseudoflusso ottenuto e si dica se è ottimo. Giustificare tutte le risposte.

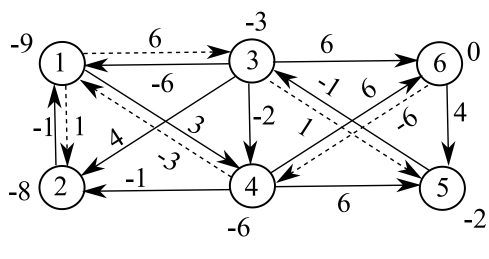
Risposta: Lo (pseudo)flusso non è un flusso minimale in quanto esiste il ciclo $C = 1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$ che è aumentante (si veda $\boxed{\text{C}}$) e di costo negativo (si veda $\boxed{\text{E}}$); in altri termini sul grafo residuo esiste un corrispondente ciclo orientato di costo negativo e quindi non esiste un albero dei cammini minimi. L'algoritmo procede dunque a "cancellare" il ciclo C inviando su di esso la massima quantità di flusso possibile, ossia

$$\theta(C,x) = \min\{\, \min\{\, u_{ij} - x_{ij} \,:\, (\,i\,,\,j\,) \in C^+ \,\}\,,\, \min\{\, x_{ij} \,:\, (\,i\,,\,j\,) \in C^- \,\}\,\} = \min\{\, \min\{\, 2-0 \,\}\,,\, \min\{\, 2\,,\, 2\,,\, 1 \,\}\,\} = 1.$$

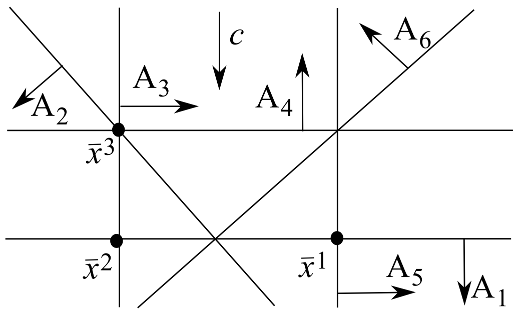
Il flusso corrispondente, mostrato sotto a sinistra, è ottimo, come si può verificare calcolando un albero dei cammini minimi sul grafo residuo rispetto ad esso con insieme di radici N, quale quello mostrato sotto a destra (archi tratteggiati) con le rispettive etichette. Lo pseudoflusso corrispondente è minimale, come si può verificare calcolando un albero dei cammini minimi sul grafo residuo rispetto a x. Essendo x sia un flusso ammissibile che minimale, esso è un flusso ottimo con valore $cx = 20$.



$\theta = 1$, $c(C) = -2$, $cx = 20$



4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di *PL* rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c, A_1 ed A_4 sono collineari tra loro, ed anche A_3 ed A_5 lo sono. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Per $B = \{2, 3\}$ si può afferare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III nessuna delle due cose

B Per $B = \{1, 3\}$ si può affermare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale degenere III entrambe le cose

C Per $B = \{1, 2\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose

D Per $B = \{3, 5\}$ si può affermare che

I non è una base II è una base duale degenere III nessuna delle due cose

E Per $B = \{1, 3\}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 4$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Per $B = \{1, 5\}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 3$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Per $B = \{1, 5\}$, dato l'indice entrante stabilito alla domanda precedente, l'indice uscente è

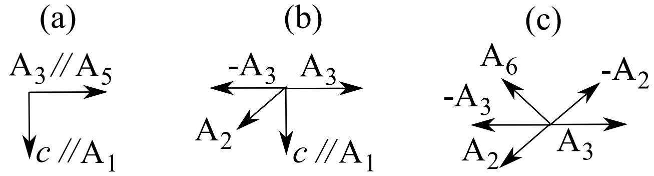
I $h = 1$ II $h = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

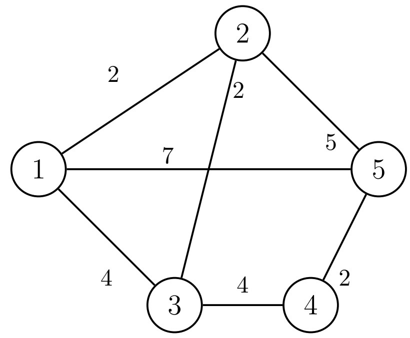
H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{1, 5\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte. Al termine, nel caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primale e duale ottenute. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{1, 5\}$, La soluzione primale di base $\bar{x}^1$, mostrata direttamente nella figura sopra, viola il solo vincolo 3: pertanto $k = 3$ (si veda F). Poiché $A_3 \in cono(A_1, A_5)$, come mostrato in (a) sotto, ed in effetti $A_3 \in cono(\{A_5\})$ essendo collineare con A_5 (con lo stesso verso): pertanto si ha $\eta_5 > 0$ ed $\eta_1 = 0$, da cui $h = 5$ (si veda G).

Alla seconda iterazione, quindi, $B = \{1, 3\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ viola i vincoli 2, 4 e 6, come mostrato nella figura sopra, quindi $k = 2$ per la regola anticiclo di Bland. Come mostrato in (b), poiché $A_2 \in cono(A_1, -A_3)$, si ha $\eta_1 > 0$ ed $\eta_3 < 0$, da cui $h = 1$.

Alla terza iterazione, quindi, $B = \{2, 3\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^3$ viola il solo vincolo 6, come mostrato nella figura sopra, quindi $k = 6$. Come mostrato in (c), poiché $A_6 \in cono(-A_2, -A_3)$, si ha $\eta_2 < 0$ ed $\eta_3 < 0$, quindi l'algoritmo termina avendo determinato che il duale è inferiormente limitato e il primale è vuoto.





5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo (TSP) sul grafo pesato di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal vertice 1 (in caso di parità si scelga il nodo con indice minore) ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo (MS1T) come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando il vertice con il maggior numero di lati incidenti nella soluzione dell'MS1T, fissando a zero la variabile corrispondente a tali lati. Si visita breadth-first (a ventaglio) l'albero delle decisioni, ossia si implementa Q come una fila, e si inseriscono in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di lati fissati a zero. Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I il lato $\{1, 5\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano calcolato dall'euristica.

II l'1-albero di costo minimo calcolato al nodo radice è un ciclo hamiltoniano.

III entrambe le precedenti sono corrette.

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\overline{z}$ al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = 17$ II $\underline{z} = 17$, $\overline{z} = 17$ III $\underline{z} = 15$, $\overline{z} = 18$

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I x_{13}, x_{23}, x_{34} II x_{12}, x_{23}, x_{34} III nessuna (l'algoritmo termina)

D Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I almeno un nodo viene chiuso per valutazione inferiore

II nessun nodo viene chiuso per inammissibilità

III almeno un nodo viene chiuso per ottimalità

E Quali sono le migliori valutazioni inferiore e superiore dopo aver visitato il nodo radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 17$, $\overline{z} = 17$ II $\underline{z} = 15$, $\overline{z} = 17$ III $\underline{z} = 15$, $\overline{z} = 18$

F Si valuti il costo del lato $\{2, 3\}$. Di quanto e come dovrebbe essere modificato affinché l'algoritmo termini con una soluzione ottima al nodo radice?

Risposta: Se il costo c_{23} assumesse un valore maggiore di 5, allora la soluzione ottenuta dall'euristica del vicino più vicino sarebbe $\{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3\}\}$ di costo $\overline{z} = 17$. L'1-albero di costo minimo calcolato dal rilassamento al nodo radice sarebbe coinciderebbe con lo stesso ciclo Hamiltoniano, quindi l'algoritmo terminerebbe al nodo radice.