1) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto ed il corrispondente problema duale (D). **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I la soluzione $x = [\,2\,,\,0\,]$ è primale degenere

II la soluzione $x = [\,-1\,,\,0\,]$ è ottima per il primale

III la soluzione $x = [\,0\,,\,2\,]$ è primale non degenere

B Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I esiste almeno una soluzione duale ammissibile complementare a $x = [\,2\,,\,0\,]$

II esiste almeno una soluzione duale ammissibile complementare a $x = [\,0\,,\,2\,]$

III entrambe le precedenti sono corrette

C Per quale famiglia di coppie di valori di α e β la soluzione $x = [\,-1\,,\,0\,]$ è ottima per (P)?

I $\alpha = \beta = 0$ II $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ III nessuna

D Se $\alpha = 0$ e $\beta = -1$, quale delle seguenti direzioni è di crescita per (P)?

I $\xi = [\,1\,,\,-1\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precedenti

E Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I esiste una soluzione ottima primale non degenere

II esiste una soluzione ottima primale degenere

III entrambe le precedenti sono corrette

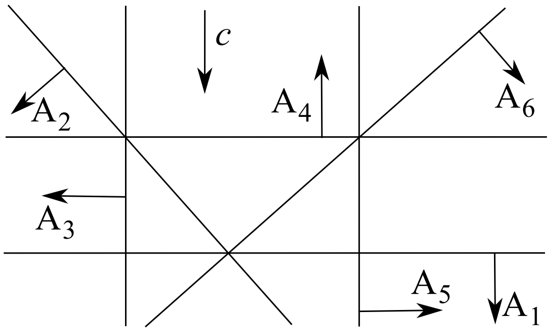
F Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, quale delle seguenti direzioni è ammissibile per $x = [\,0\,,\,2\,]$ e di crescita?

I $\xi = [\,-1\,,\,0\,]$ II $\xi = [\,-1\,,\,1\,]$ III nessuna delle precedenti

G Se $\alpha = -1$ e $\beta = -1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime per (P)? Esistono soluzioni duali ammissibili complementari a $\bar{x} = [\,-1/2\,,\,1/2\,]$ e, in caso affermativo, determinare tutte e sole le soluzioni duali ammissibili complementari a $\bar{x}$. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Se $\alpha = -1$ e $\beta = -1$, la funzione obiettivo è parallela al vincolo $-x_1 - x_2 \leq 0$ e la direzione lungo la quale cresce è data dal vettore dei coefficienti della funzione obiettivo stessa, cioè $[\,-1\,,\,-1\,]$. L'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime è rappresentato dal segmento di estremi $\bar{x}_1 = [\,-1\,,\,1\,]$ e $\bar{x}_2 = [\,2\,,\,-2\,]$ definito da $\{\,[\,t\,,\,-t\,],\ t \in [-1, 2]\,\}$. La soluzione $\bar{x}$ è quindi ottima, pertanto, per il teorema degli scarti complementari, deve necessariamente esistere una soluzione duale ammissibile complementare ad essa. In $\bar{x}$ è attivo solo il secondo vincolo, quindi, per il teorema degli scarti complementari $\bar{y}_i = 0$ per $i = \{\,1\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,\}$ e l'insieme di tutte le soluzioni duali ottime è $\{\,[\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]\,\}$, dal momento che i vincoli del problema duale (D) diventano $-y_2 = \alpha = -1$ e $-y_2 = \beta = -1$.

2) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di *PL* rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c, A_1, ed A_4 sono collineari (non tutti con lo stesso verso) ed ortogonali ad A_3 ed A_5, che sono quindi collineari tra loro. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



[A] Per $B = \{ 1 , 2 \}$ si può affermare che

[I] è una base primale degenere [II] è una base duale ammissibile [III] entrambe le cose sono vere

[B] Per $B = \{ 4 , 6 \}$ si può affermare che

[I] è una base primale degenere [II] è una base duale degenere [III] entrambe le cose sono vere

[C] Per $B = \{ 2 , 6 \}$ si può affermare che

[I] è una base primale non ammissibile [II] è una base duale ammissibile [III] non è una base

[D] Se la base corrente è $B = \{ 2 , 3 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 2$ è

[I] ammissibile [II] di crescita [III] nessuna delle due cose è vera

[E] Se la base corrente è $B = \{ 4 , 6 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 4$ è

[I] ammissibile [II] di crescita [III] entrambe le cose sono vere

[F] Se la base corrente è $B = \{ 4 , 6 \}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 6$ è

[I] ammissibile [II] di crescita [III] nessuna delle due cose è vera

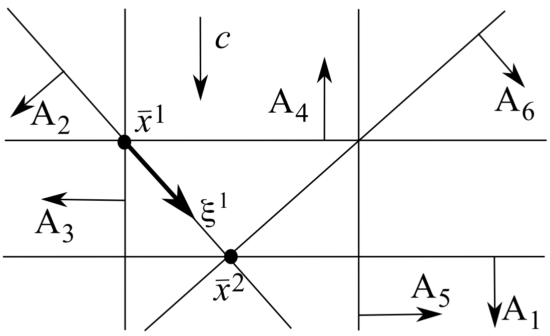
[G] Se la base corrente è $B = \{ 4 , 5 \}$, l'indice uscente selezionato dall'algoritmo è

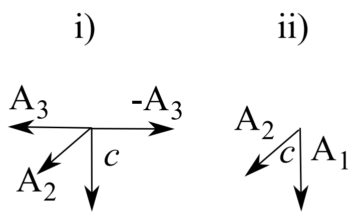
[I] $h = 4$ [II] $h = 5$ [III] nessuno (l'algoritmo termina)

[H] Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{ 2 , 3 \}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Risposta: La soluzione primale di base $\bar{x}^1$ della prima iterazione è mostrata nella figura qui sotto (intersezione delle frontiere dei vincoli 2 e 3). B è primale ammissibile ma non duale ammissibile: infatti $c \in cono(\{ A_2 , -A_3 \})$, come mostrato in i). Pertanto, $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_3 < 0$, $h = 3$ e si determina la direzione ξ^1 mostrata in figura (interna alla frontiera del vincolo 2, che rimane in base, e si allontana dalla frontiera del vincolo 3, che uscirà dalla base, avendo con A_3 prodotto scalare negativo). La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) e ammissibile. ξ^1 ha prodotto scalare positivo con A_1, A_5 ed A_6 ed ovviamente il massimo passo lungo ξ^1 che può essere fatto senza violare i vincoli è lo stesso per i vincoli 1 e 6 ($\lambda_1 = \lambda_6$); pertanto, per la regola anticiclo di Bland si ha $k = 1$.

Alla seconda iterazione si ha quindi $B = \{ 1 , 2 \}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 1 e 2. B è duale ammissibile: infatti $c \in cono(\{ A_1 , A_2 \})$, come mostrato in ii), ed in effetti $c \in cono(\{ A_1 \})$ essendo collineare con A_1 (con lo stesso verso): pertanto $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 = 0$ e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale.





3) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, al problema di *PL* dato qui accanto. Si consideri $c_1 = 3$ ove non indicato diversamente. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & c_1x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \end{array}$$

A Per $B = \{1, 2\}$ si può affermare che

I è una base duale ammissibile — II è una base primale degenere — III entrambe le cose sono vere

B Per $B = \{1, 3\}$ si può affermare che

I è una base duale ammissibile — II è una base duale degenere — III entrambe le cose sono vere

C Per la base corrente è $B = \{4, 5\}$ l'indice entrante è:

I nessuno — II $k = 2$ — III $k = 1$

D Per la base corrente è $B = \{4, 5\}$ l'indice uscente è:

I $h = 4$ — II $h = 5$ — III nessuno

E Per la base $B = \{4, 5\}$, la direzione di decrescita è:

I $d = [0, 1, 0, 1/3, -2/3]$ — II $d = [1/3, 0, 1, 0, -2/3]$ — III $d = [0, 3/2, 0, 1/2, 1]$

F Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{1, 4\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte. Una volta ottenuta la soluzione ottima, calcolare algebricamente per quali valori di c_1 rimane tale.

Risposta: Per $B = \{1, 4\}$ si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{y}_B = cA_B^{-1} = [3, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = [1, 1] \quad , \quad \bar{y} = [\bar{y}_B, 0] = [1, 0, 0, 1, 0]$$

$$A_N\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix} = b_N$$

Poiché B è primale ammissibile, l'algoritmo termina dichiarando la base ottima.

Valutiamo ora per quali valori di c_1 la base resta ottima. Notiamo che un cambio nel valore c_1 influenza la sola soluzione duale, che, qualora non fosse più ammissibile, indicherebbe che la base corrente non è più ottima. Calcoliamo allora la soluzione duale parametrica:

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [c_1, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = [c_1 - 2, 1] \quad , \quad \bar{y} = [\bar{y}_B, 0] = [c_1 - 2, 0, 0, 1, 1]$$

Perché resti ammissibile, occorre $\bar{y}_B \geq 0$, cioè $c_1 \geq 2$.

4) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non decrescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza. Si assuma $\alpha = 4$, ove non diversamente indicato. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 2x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\ & 3x_1 & + & \alpha x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 9 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_4, x_2, x_3, x_1\}$ II $\{x_3, x_2, x_4, x_1\}$ III $\{x_4, x_3, x_2, x_1\}$

B Quali affermazioni sono corrette per il nodo radice?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo è $[0, 1, 1, 1]$

II La soluzione ottima del rilassamento continuo ha componenti frazionarie.

III La soluzione ottima del rilassamento e la soluzione dell'eurisitica coincidono.

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_3, x_2, x_4 II x_3, x_1 III nessuna

D Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 33/2$ II $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 14$ III $\underline{z} = 14$, $\bar{z} = 16$

E Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo e ottenute risolvendo il rilassamento?

I $[1, 1, 0, 1]$, $[1, 0, 1, 1]$, $[0, 1, 1, 0]$ II $[0, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 0, 1]$ III nessuna

F Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno un nodo per ottimalità.

II L'algoritmo non chiude nessun nodo per inammissibilità.

III L'algoritmo chiude due nodi per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

G È possibile modificare α, mantenendolo strettamente positivo e intero, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.

Risposta: È possibile porre $\alpha = 3$: in questo caso si ottengono gli ordinamenti $\{x_4, x_2, x_3, x_1\}$. In questo caso, si ottiene come soluzione del rilassamento continuo la soluzione intera $x = [0, 1, 1, 1]$ in quanto la somma dei pesi degli oggetti presi è uguale alla capacità complessiva dello zaino. Poiché è la soluzione ottima del rilassamento continuo, il suo valore di funzione obiettivo $\bar{z} = cx = 18$ è una valutazione superiore sull'ottimo del problema. Ma poiché è intera, il suo valore di funzione obiettivo $cx = 18$ é anche una valutazione inferiore sull'ottimo del problema, il che porta a porre il valore dell'"incumbent" $z = 18$. Da da ciò discende che x è una soluzione ottima e l'algoritmo termina al nodo radice in quanto si ottiene immediatamente $\bar{z} \leq z$ e non è necessario procedere col branching.