1) Sotto le feste, la holding NicolaDiBari s.r.l. è in gran fermento. In particolare, la controllata Officina degli Elfi (OE) deve organizzare la produzione dei giocattoli per soddisfare tutte le richieste. L'OE produce $P = \{1, \dots, n\}$ tipi di giocattoli utilizzando $M = \{1, \dots, m\}$ diverse postazioni di lavoro nel corso dei $T = 20$ giorni precedenti la notte in cui si effettueranno le consegne.

Affinché tale notte tutto fili liscio, la controllata che si occupa della distribuzione, la Rudolph&Co, ha definito le quantità d_{it} di giocattolo i da poter disporre nel giorno t in modo che possano essere spedite preventivamente ai centri di smistamento distribuiti in tutta la Terra.

Gli elfi, in quanto artigiani, sono molto gelosi dei loro attrezzi; perciò, ogni postazione corrisponde esattamente ad un elfo. Se la postazione j è attiva il giorno t, la variabile binaria y_{jt} assume il valore 1, altrimenti assume il valore 0. La variabile $x_{ijt} \geq 0$ definisce, per il giorno $t = 1, \dots, T$, la quantità del giocattolo $i \in P$ prodotto sulla postazione $j \in M$ dall'elfo corrispondente.

Gli elfi, molto specializzati, producono i giocattoli a velocità diverse: v_{ij} indica in quanto tempo l'elfo della postazione j produce un giocattolo i. Il costo di produzione dipende esclusivamente dalle ore di lavoro degli elfi al costo orario h_j.

Il contratto degli elfi prevede che non possano lavorare oltre V ore al giorno. Inoltre, il sindacato CGElfi ha strappato una nuova "santa clausola contrattuale": se un elfo lavora per 5 giorni di fila, al sesto giorno deve riposare.

La produzione giornaliera può contribuire a soddisfare la domanda nei giorni successivi, purché le scorte non superino la capacità del magazzino Q. Il magazzino è una "ghiaccio-struttura" provvisoria e deve avere scorte nulle all'inizio e alla fine del periodo. La variabile $I_{it} \geq 0$ indica le scorte del giocattolo $i \in P$ al termine del giorno $t = 1, \dots, T$. Il costo di mantenimento per unità di stock è s_i.

La direzione dell'OE vuole ottimizzare la produzione per minimizzare i costi totali, comprensivi sia dei costi di produzione sia di quelli di mantenimento delle scorte, senza violare le richieste e il contratto degli elfi. Si noti che, una volta consegnati i prodotti alla Rudolph&Co, l'OE non ha più alcun costo operativo.

domanda a) Selezionare tra le variabili, i vincoli e le funzioni obiettivo seguenti tutti quelli che permettono di completare la formulazione. Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $I_{it-1} + \sum_{j \in M} x_{ijt} = d_{it} \qquad i \in P \quad , \quad t = 2, \dots, T$

B SI NO $I_{it-1} + \sum_{j \in M} x_{ijt} - I_{it} = d_{it} \qquad i \in P \quad , \quad t = 2, \dots, T$

C SI NO $\sum_{j \in M} x_{ij0} - I_{i0} = d_{i0} \qquad i \in P$

D SI NO $I_{iT} = 0 \qquad i \in P$

E SI NO $I_{i0} = 0 \qquad i \in P$

F SI NO $0 \leq \sum_{i \in P} I_{it} \leq Q \qquad t = 1, \dots, T$

G SI NO $0 \leq \sum_{t=1}^{T} I_{it} \leq Q \qquad i \in P$

H SI NO $\sum_{j \in M} x_{ijt} = d_{it} \qquad i \in P \quad , \quad t = 1, \dots, T$

I SI NO $5 - \sum_{t=\tau}^{\tau+4} y_{jt} \geq y_{j\tau+5} \qquad \tau = 1, \dots, 15 \quad , \quad j \in M$

J SI NO $5 - \sum_{t=\tau}^{\tau+4} y_{jt} \leq y_{j\tau+5} \qquad \tau = 1, \dots, 15 \quad , \quad j \in M$

K SI NO $5y_{j\tau+5} = \sum_{t=\tau}^{\tau+4} y_{jt} \qquad \tau = 1, \dots, 15 \quad , \quad j \in M$

L SI NO $5y_{j\tau+5} \leq \sum_{t=\tau}^{\tau+4} y_{jt} \qquad \tau = 1, \dots, 15 \quad , \quad j \in M$

M SI NO $\sum_{i \in P} v_{ij} \, x_{ijt} \, y_{jt} \leq V \qquad j \in M \quad , \quad t = 1, \dots, T$

N SI NO $\sum_{i \in P} v_{ij} \, x_{ijt} \, y_{jt} \leq V y_{jt} \qquad j \in M \quad , \quad t = 1, \dots, T$

O SI NO $\sum_{i \in P} v_{ij}\, x_{ijt} \le V\, y_{jt} \qquad j \in M \quad , \quad t = 1, \ldots, T$

P SI NO $\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in P} \sum_{j \in M} h_j\, v_{ij}\, x_{ijt} \; + \; \sum_{t=0}^{T} \sum_{i \in P} s_i\, I_{it}$ (funzione obiettivo)

Q SI NO $\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in P} \sum_{j \in M} h_j\, x_{ij} \; + \; \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in P} s_i\, I_{it}$ (funzione obiettivo)

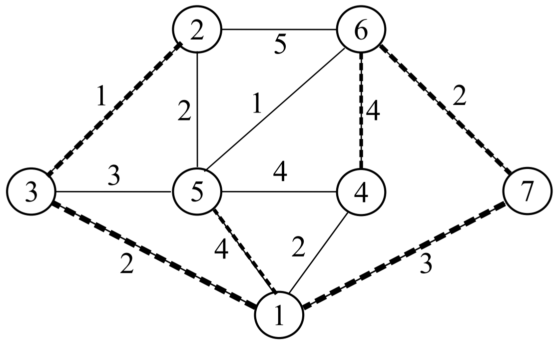
R SI NO $\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in P} \sum_{j \in M} h_j\, v_{ij}\, x_{ijt} \; + \; \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in P} s_i\, I_{it}$ (funzione obiettivo)

domanda b) La NicolaDiBAri s.r.l. sta valutando l'affitto giornaliero di una seconda "ghiaccio-struttura" dal costo M e dalla capacità Q'. Si vuole permettere al modello di considerare l'affitto di tale struttura nei giorni in cui la capacità del magazzino attuale viene superata. Si descriva come modificare la formulazione per includere questa nuova specifica.

risposta alla domanda b) Occorre introdurre una nuova variabile binaria $z_t \in \{\, 0\,,\, 1\,\}$ che assume il valore 1 se si affitta la seconda struttura il giorno t, 0 altrimenti e modificare la funzione obiettivo inserendo la componente $\sum_{t=1}^{T} M z_t$. Inoltre, bisogna cambiare il vincolo F sulla capacità del magazzino:

$$\sum_{i \in P} I_{it} \le Q + Q'\, z_t$$

2) Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero dato sono corrette?

I Sostituendo il lato $\{1,3\}$ con il lato $\{2,5\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esiste esattamente un altro albero di copertura che ha lo stesso costo di quello dato

III Nessuna delle due

B Quali di questi lati non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno   II $\{1,5\}$, $\{1,7\}$, $\{4,6\}$ e $\{6,7\}$ III $\{1,3\}$, $\{1,5\}$ e $\{4,6\}$

C Quali di questi lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$ II $\{2,6\}$, $\{3,5\}$ III nessuna delle precedenti

D Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I 14   II 10   III 8

E Qual è il numero minimo di sostituzioni di archi che bisogna effettuare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

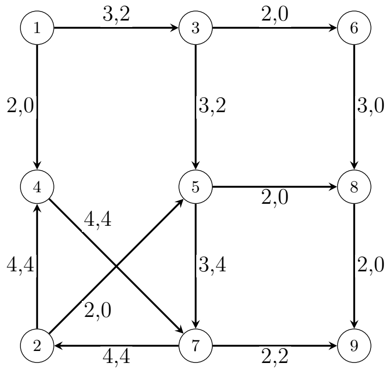
I 1   II 2   III 3

F I) Modificare il costo del minor numero possibile di lati affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. II) Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{5,6\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero? Giustificare le risposte.

Risposta: I) L'insieme di tutti i lati che non rispettano la condizione di ottimalità per tagli è $\{\{1,5\},\{1,7\},\{4,6\},\{6,7\}\}$, mentre l'insieme di tutti i lati che non rispettano la condizione di ottimalità per cicli è $\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,5\},\{5,6\}\}$. Siccome in entrambi i casi il numero di lati è quattro, possiamo modificare i lati del primo o del secondo insieme, quindi o poniamo $c_{15}, c_{67} \leq 1$ e $c_{17}, c_{46} \leq 2$, in modo tale che tutti i lati rispettino la condizione di ottimalità per tagli, o poniamo $c_{14}, c_{25}, c_{35}, c_{56} \geq 4$, in modo tale che tutti i lati rispettino la condizione di ottimalità per cicli.

II) Scambiando il lato $\{5,6\}$ con un altro lato dell'albero, non si ottiene alcun albero di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{5,6\}$ non è presente alcun lato di costo 1.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo $s = 1$ al nodo $t = 9$ ed il corrispondente flusso mostrati in figura, dove, per ogni arco, il primo valore rappresenta la capacità e il secondo valore il flusso sull'arco, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il flusso mostrato in figura è:

I ammissibile di valore 1 II ammissibile di valore 2 III non ammissibile.

B Ponendo il flusso $x_{57} = 2$ si ottiene:

I il flusso ottimo II un flusso non ammissibile III un flusso ammissibile ma non ottimo

C Considerando il flusso ammissibile tra quello del grafico e quello ottenuto dalla modifica del punto precedente, si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera?

I Il flusso considerato ha un costo di 76

II $2 \to 4 \to 7 \to 2$ è un cammino aumentante

III Il flusso non è massimo

D Considerando il flusso ammissibile (come garantito in precedenza), quale di queste affermazioni è vera?

I $1 \to 4 \to 2 \to 7 \to 5 \to 8 \to 9$ è un cammino aumentante

II $1 \to 3 \to 6 \to 8 \to 9$ è un cammino aumentante con capacità $\theta = 2$

III $1 \to 4 \to 2 \to 7 \to 9$ è un cammino aumentante

E Quale dei seguenti tagli ha capacità pari a 5?

I $N_s = \{1\}$ II $N_s = \{1, 3\}$ III $N_t = \{9\}$

F A partire dal flusso ammissibile ottenuto, si esegua l'algoritmo di Edmonds&Karp. Qual è il valore del flusso ottimo ottenuto?

I 5 II 4 III 3

G Qual è il taglio di capacità minima (N_s, N_t) individuato dall'algoritmo?

I $N_s = \{1, 3, 4\}$ II $N_s = \{1\}$ III $N_t = \{9\}$

H Quanti modi ci sono per aumentare la capacità di ogni singolo arco, in modo che il valore del flusso massimo aumenti anch'esso di un'unità?

Risposta: Risolvendo il problema all'ottimo si può notare che il taglio $N_t = \{9\}$ è l'unico taglio di capacità minima. Perciò, per aumentare il flusso massimo di una unità, si può aumentare la capacità dell'arco $\{8, 9\}$ o dell'arco $\{7, 9\}$ di una unità. In tal modo, si potrebbe inviare flusso su cammini aumentanti quali $1 \to 3 \to 6 \to 8 \to 9$ o $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9$, entrambi di capacità 1.

4) Si consideri il problema primale (P) dato qui accanto. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}$$

A Quale delle seguenti affermazioni è vera rispetto alla base $B = \{3, 4\}$:

I è duale degenere II è primale ammissibile III nessuna delle precedenti

B Quale delle seguenti affermazioni è vera rispetto alla base $B = \{4, 5\}$:

I non permette direzioni di crescita II è duale ammissibile III è primale non degenere

C Quale delle seguenti affermazioni è vera rispetto alla base $B = \{1, 2\}$:

I è primale degenere II è duale non ammissibile III non è una base

D Si consideri il poliedro definito dai soli vincoli 3 e 4. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

I La regione ammissibile definita da tale poliedro è vuota

II Il poliedro ha almeno una direzione di linealità

III Esiste un vettore dei costi per cui il poliedro ha un'unica soluzione finita

E Ottenuta la soluzione ottima del problema (P), di quante unità aumenterebbe il suo valore (cx) se si aumentasse di una unità b_1 (il termine noto del vincolo 1)?

I non aumenterebbe II di 1 unità III di 2 unità

F Data la base $B = \{1, 3\}$, qual è l'indice entrante determinato dall'algoritmo del simplesso primale?

I $k = 4$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Si descrivano le iterazioni del simplesso primale a partire dalla base $B = \{2, 3\}$, giustificando algebricamente tutti i passaggi.

Risposta: Data la base $B = \{2, 3\}$, la matrice di base corrispondente e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

E le soluzioni primale e duale corrispondenti:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_B = cA_B^{-1} = [3, 2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [2, -1], \quad \bar{y} = [\bar{y}_B, 0] = [0, 2, -1, 0, 0]$$

La soluzione corrispondente è primale ammissibile, ma non duale ammissibile, perché $y_3 < 0$. Perciò il vincolo $h = 3$ esce dalla base. Si calcola la direzione di crescita

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Cerchiamo il passo massimo e il vincolo uscente:

$$A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

I vincoli che danno un valore positivo sono il primo e il quarto. Il passo corrispondente è

$$\bar{\lambda} = \min\{(b_1 - A_1\bar{x})/(A_1\xi), (b_4 - A_4\bar{x})/(A_4\xi)\} = \min\left\{\left(4 - [1, 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)/1, \left(0 - [-1, 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)/1\right\} = \min\{0, 2\} = 0.$$

Il vincolo che dà il passo massimo è la $k = 1$ con valore 0; pertanto, si effettuerà un cambio di base degenere. La nuova base è $B = \{1, 2\}$, con la stessa soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ e lo stesso valore della soluzione $c\bar{x} = 10$. La matrice di base corrispondente e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La soluzione duale è ammissibile:

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [3, 2] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = [1, 1], \quad \bar{y} = [\bar{y}_B, 0] = [1, 1, 0, 0, 0]$$

Quindi non ci sono direzioni di crescita. La soluzione corrente $\bar{x}$ è ottima e ha valore $c\bar{x} = 10$.

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non crescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 0. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{rcccccccl} \max & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq \; 5 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in \; \{0\,,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4\}$ — II $\{x_3\,, x_2\,, x_1\,, x_4\}$ — III $\{x_4\,, x_3\,, x_2\,, x_1\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è a componenti intere

II La soluzione dell'euristica al nodo radice cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 3

III nessuna delle precedenti è corretta

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 7$, $\bar{z} = 8$ — II $\underline{z} = 7$, $\bar{z} = 25/3$ — III $\underline{z} = 25/3$, $\bar{z} = 9$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I nessuna — II x_3, x_2 — III x_3, x_4, x_2

E Quali sono le migliori valutazione superiore ed inferiori globali $\underline{z} \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $\underline{z} = 7$, $\bar{z} = 15/2$ — II $\underline{z} = 5$, $\bar{z} = 7$ — III $\underline{z} = 7$, $\bar{z} = 7$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo e ottenute risolvendo il rilassamento?

I nessuna — II $[\,1\,,0\,,0\,,1\,]$, $[\,1\,,0\,,1\,,0\,]$ — III $[\,1\,,1\,,0\,,0\,]$, $[\,1\,,0\,,0\,,1\,]$, $[\,0\,,1\,,1\,,0\,]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno due nodi per inammissibilità

II L'algoritmo chiude tutti i nodi per ottimaliltà (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

III L'algoritmo chiude almeno un nodo per la sola valutazione superiore ($\underline{z} \geq \bar{z}(P_i)$), ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

H In quanti modi è possibile modificare il volume delle zaino (il lato destro del vincolo, in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice ottenendo una soluzione diversa da $[\,0\,,0\,,0\,,0\,]$? Giustificare la risposta.

Risposta: Affinché l'algoritmo termini direttamente alla radice occorre che la soluzione del rilassamento sia a componenti intere: perché ciò avvenga, occorre che la somma dei pesi degli oggetti presi nello zaino secondo l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente sia uguale al volume dello zaino. È quindi possibile modificare il volume dello zaino in quattro modi diversi, ponendolo uguale a 1, 3, 6 o maggiore/uguale di 11, ottenendo rispettivamente le soluzioni intere $[\,1\,,0\,,0\,,0\,]$, $[\,1\,,1\,,0\,,0\,]$, $[\,1\,,1\,,1\,,0\,]$ e $[\,1\,,1\,,1\,,1\,]$.