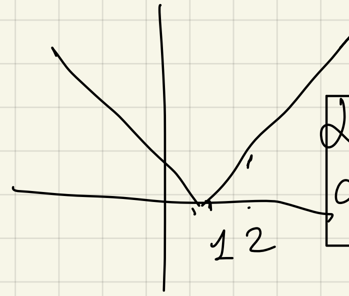
Es 1. Compito del 29/1/2026

$$A=\begin{bmatrix}\alpha-1 & & & -1\\ 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \alpha-1\end{bmatrix}$$



$\boxed{\begin{matrix}\alpha<0\\ \alpha>2\end{matrix}}$

1) Pred. diag. per righe $|\alpha-1|>1$

2) G-S è applicabile se $\alpha\neq 1$.

$$M^{-1}N=\begin{bmatrix}\alpha-1 & & \\ 1 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 1 & & \alpha-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

3)

$$M=(\alpha-1)\begin{bmatrix}1 & & \\ \frac{1}{\alpha-1} & \ddots & \\ \vdots & & \\ \frac{1}{\alpha-1} & & 1\end{bmatrix}$$

se $\alpha\neq 1$ la matrice è sempre invertibile ed essendo una matrice elementare di Gauss per una costante

$$M^{-1}=\frac{1}{\alpha-1}\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{\alpha-1} & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ -\frac{1}{\alpha-1} & & 1\end{bmatrix}$$

$$G=\frac{1}{\alpha-1}\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{\alpha-1} & \ddots & \\ \vdots & & \\ -\frac{1}{\alpha-1} & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \frac{1}{\alpha-1}\\ & 0 & -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\\ & & \vdots\\ & & -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\end{bmatrix}$$

G è una matrice trapezoidale superiore e i suoi autovalori sono

$\lambda=0$ con molt. $n-1$

$\lambda=-\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ con molt 1

$\rho(G)=\frac{1}{(\alpha-1)^2}\Rightarrow \rho(G)<1 \iff \frac{1}{(\alpha-1)^2}<1$ $\quad \alpha<0$, $\alpha>2$

4) Per il metodo di Gauss-Seidel vale

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i=1 \dots n$$

Per la struttura di A, nel nostro caso abbiamo:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[b_1 + x_n^{(k)} \right]$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[b_i - x_1^{(k+1)} \right] \quad i=2 \dots n$$

Quindi abbiamo

```
function xnew=GS_iter(alfa, xold, b)
 n=lenght(b);
 xnew= zeros(n,1);
 xnew(1)= (b(1) + xold(n))/(alfa-1);
 for i=2:n
     xnew(i)= (b(i)- xnew(1))/(alfa- 1);
 end
end
```

Il costo è $O(n)$.

Es 1.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{3x - 5}$

Soluzioni

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ $\qquad \Delta = 64 - 60 = 4$

$f''(x) = 6x - 8 = 0$ $\qquad x = \dfrac{8 \pm 2}{6}$ $\begin{array}{l} \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ 1 \end{array}$

$x_F = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

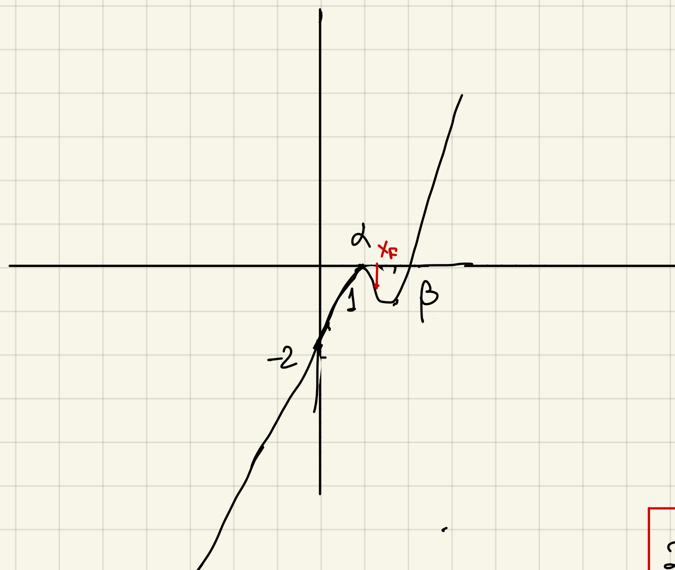
$f'(x) > 0$ $\qquad x > \dfrac{5}{3}$ minimo

$x < 1$ massimo

$f(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$

$f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{5^3}{27} - 4 \cdot \dfrac{25}{9} + 5 \cdot \dfrac{5}{3} - 2$

$=$



$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^3 - 2x^2 + x & x - 2 \\ \hline -2x^2 + 4x - 2 & \end{array}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{2 radici reali} \\ \alpha = 1 \text{ con molt. } 2. \\ \beta = 2 \text{ con molt. } 1 \end{array}}$

b) Convergenza locale:

$f'(\beta) \neq 0 \Rightarrow$ ho convergenza locale a β di ordine esattamente due perché $f''(\beta) \neq 0$

$f'(\alpha)=0$ Non possiamo applicare il teorema di convergenza locale poiché $f'(\alpha)=0$

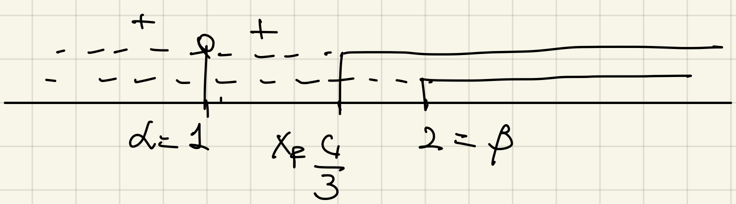
Questo non significa che non ci sia convergenza ma la convergenza sarà lineare

Studiamo la convergenza in largo

$f(x)>0$ per $x>\beta$

$f''(x)>0$ per $x > x_F = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$



Dal teorema di convergenza in largo otteniamo che per $S_1=(-\infty,1)$ abbiamo convergenza monotona crescente ad $\alpha=1$

per $x\in S_2=(1,\frac{4}{3})$ abbiamo convergenza monotona decrescente ad α.

per $x\in S_3=(2,+\infty)$ abbiamo convergenza monotona decrescente a β

In realtà si può estendere l'intervallo per cui si ha convergenza a β anche ai punti tra $(\frac{5}{3},\beta)$ infatti $\forall x_0\in(\frac{5}{3},\beta) \Rightarrow x_1\in S_3$ e poi converge in modo monotono.

3) Le due equazioni sono equivalenti infatti:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x^2(x-4) + 4x + \underbrace{x - 4} + 2 = 0$$

$$(x-4)(x^2+1) = -2 - 4x$$

$$x - 4 = -\frac{2(1+2x)}{x^2+1} \qquad x = 4 - \frac{2(1+2x)}{x^2+1}$$

$$g(x) = 4 - \frac{2(1+2x)}{x^2+1} = \frac{4x^2+4-2-4x}{x^2+1} = \boxed{\frac{4x^2-4x+2}{x^2+1}}$$

$$g'(x) = \frac{(8x-4)(x^2+1) - 2x(4x^2-4x+2)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \cancel{8x^3} - 4x^2 + 8x - 4 - \cancel{8x^3} + 8x^2 - 4x = \frac{4x^2+4x-4}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(1) = \frac{4+\cancel{4}-\cancel{4}}{\cancel{4}} = 1 \qquad g'(2) = \frac{4\cdot 4 + 8 - 4}{25} = \frac{\cancel{20}}{\cancel{25}} = \frac{4}{5} < 1$$

Ho quindi convergenza locale a $\beta = 2$. Poiché $g'(1) = 1$ non sappiamo se ci sia convergenza. Occorre esaminare cosa succede nell'intorno di 1. $\left|\frac{4x^2+4x-4}{(x^2+1)^2}\right| < 1 \quad |4x^2+4x-4| < (x^2+1)^2$

È verificata in un intorno di 1 quindi ho convergenza locale anche in 1.

Condizionamento calcolo di $g(x)$:

$$\frac{x}{g(x)} g'(x) = \frac{x(\cancel{x^2+1})}{4x^2-4x+2} \cdot \frac{8x-4}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}$$

$$C_x = \frac{4x(2x-1)}{(4x^2-4x+2)(x^2+1)}.$$

$4x^2 - 4x + 2 = 0$ MAI $\qquad \Delta = 16 - 16\cdot 2 < 0$ Non ci sono radici reali

$x^2 + 1 = 0$ MAI

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} C_x = 0 \Rightarrow$ il problema del calcolo di $g(x)$ è sempre ben condizionato.