1) Ash Ketchum sogna di diventare un Maestro di Pokémon e, per realizzare il suo sogno, vuole definire il team Pokémon perfetto, cioè quello con le migliori caratteristiche, in grado di vincere la Lega Pokémon, una competizione che vede impegnati gli allenatori e i maestri più forti di una certa regione. Affiancato da Brock e Misty, dopo aver affrontato innumerevoli sfide e combattimenti di ogni tipo e sventato i piani malvagi del Team Rocket, che cerca in ogni modo di rapire il suo Pikachu per conto del loro capo, Giovanni, Ash si chiede se esista effettivamente il team Pokémon perfetto. Le competizioni standard si svolgono tra team di sei Pokémon, ognuno dei quali ha a disposizione quattro mosse tra tutte quelle possibili. Ogni specie di Pokémon appartiene a un tipo e presenta alcune caratteristiche di attacco e di difesa. Ogni mossa può essere speciale o fisica e appartiene ad una specifico tipo che determina contro quale altro tipo di Pokémon è maggiormente efficace. A ogni mossa è associato un valore che indica il danno inflitto al Pokémon avversario.

Ash chiede quindi al suo amico d'infanzia, Gary Oak, che ha lasciato la carriera di Maestro di Pokémon per dedicarsi alla Ricerca Operativa e, in particolare, alla Programmazione Lineare Intera, di trovare il miglior team di sei Pokémon, con quattro mosse ciascuno, in grado di massimizzare il danno potenziale inflitto durante la partita e tale che, per ogni tipo di mossa, esista almeno un Pokémon che possa resistere a quella mossa. Per bilanciare il team, Ash richiede che ci siano almeno due Pokémon fisici e due Pokémon speciali e che i Pokémon attaccanti fisici abbiano solo mosse fisiche e i Pokémon attaccanti speciali abbiano solo mosse speciali.

Per formulare il problema introduciamo per Pokémon $p \in P$ e mossa $m \in M$ le variabili intere binarie:

- x_p pari a 1 se il Pokémon p è selezionato nel team, 0 altrimenti;
- y_{pm} pari a 1 se il Pokémon p usa la mossa m durante il combattimento, 0 altrimenti.

Parte della formulazione è riportata qua sotto:

$$\begin{aligned} \max\ & \dots \\ & \dots \\ & x_p \in \{0\,,\,1\} && p \in P \\ & y_{pm} \in \{0\,,\,1\} && p \in P\,,\ m \in M \end{aligned}$$

Si indichi inoltre con D_m il danno inflitto dalla mossa $m \in M$. Siano z_p e ϕ_p due parametri pari a 1 se il Pokémon p è rispettivamente un attaccante speciale o fisico, e S_m e F_m due parametri pari a 1 se la mossa $m \in M$ è rispettivamente speciale o fisica. R_{pt} è un altro parametro pari a 1 se il Pokémon p resiste alle mosse di tipo $t \in T$.

domanda a) Selezionare, tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti, tutti quelli necessari a completare la formulazione. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $h_m \in \{0\,,\,1\} \qquad m \in M$

B SI NO $\sum_{m \in M} h_m \geq 1$

C SI NO $\sum_{p \in P} x_p = 6$

D SI NO $\sum_{m \in M} y_{pm} = 4x_p \qquad p \in P$

E SI NO $\sum_{p \in P} \sum_{m \in M} y_{pm} = 4 \qquad p \in P$

F SI NO $\sum_{p \in P} y_{pm} = 4h_m \qquad m \in M$

G SI NO $\sum_{p \in P} z_p x_p \geq 2, \quad \sum_{p \in P} \phi_p x_p \geq 2$

H SI NO $\sum_{p \in P} z_p x_p \leq 2, \quad \sum_{p \in P} \phi_p x_p \geq 2$

I SI NO $\sum_{m \in M} \phi_p S_m y_{pm} = 0, \quad \sum_{m \in M} z_p F_m y_{pm} = 0 \qquad p \in P$

J SI NO $\sum_{m \in M} \phi_p S_m y_{pm} \geq 0, \quad \sum_{m \in M} z_p F_m y_{pm} \geq 0 \qquad p \in P$

K SI NO $\sum_{p \in P} \phi_p S_m y_{pm} = 0, \quad \sum_{p \in P} z_p F_m y_{pm} = 0 \qquad m \in M$

L SI NO $\sum_{p \in P} R_{pt} x_p \geq 1 \qquad t \in T$

M SI NO $\sum_{p \in P} R_{pt} x_p \leq 1 \qquad t \in T$

N SI NO $\sum_{p \in P} \sum_{m \in M} D_m h_m y_{pm}$ (funzione obiettivo)

O SI NO $\sum_{p \in P} \sum_{m \in M} D_m x_p y_{pm}$ (funzione obiettivo)

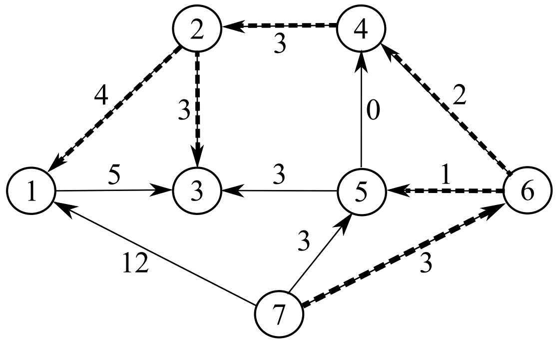
P SI NO $\sum_{p \in P} \sum_{m \in M} D_m y_{pm}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Come cambierebbe la formulazione precedente, nel caso in cui il danno aumentasse di $\frac{1}{2}$ se la mossa e il Pokémon su cui viene inflitta sono dello stesso tipo?

Risposta: Nella nuova formulazione basterebbe considerare un parametro θ_{pm} pari a 1 se il Pokémon p e la mossa m sono dello stesso tipo e modificare la funzione obiettivo nel modo seguente:

$$\sum_{m \in M} D_m \left(1 + \frac{1}{2}\theta_{pm}\right) y_{pm}$$

2) Per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 7 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni sull'albero a destra è corretta?

I Sostituendo l'arco $(2, 3)$ con l'arco $(5, 3)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II $d = [12, 8, 11, 5, 4, 3, 0]$ è il vettore delle etichette relative all'albero

III Il costo dell'albero è 16

B Dire se il grafo è aciclico, ed in caso di risposta positiva fornire una buona numerazione che lo dimostra.

I No   II Si: $[6, 5, 7, 4, 3, 2, 1]$ III Si: $[5, 6, 7, 4, 3, 1, 2]$

C Quale tra questi insiemi contiene archi che non soddisfano le condizioni di Bellman corrispondenti?

I $\{(5, 3), (5, 4), (7, 5)\}$ II $\{(5, 3), (5, 4)\}$ III $\{(7, 1), (5, 3)\}$

D Quali archi si possono sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(2, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$ con $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(7, 5)$

II $(2, 3)$, $(2, 1)$ con $(5, 3)$, $(7, 1)$

III entrambe le precedenti sono corrette

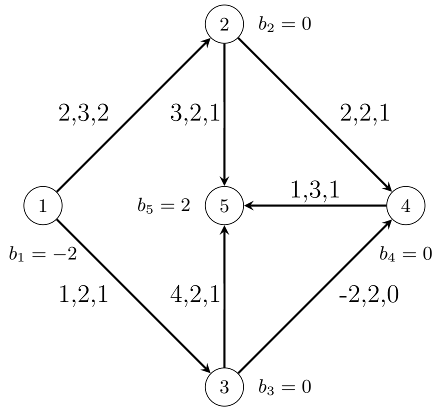
E Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 31   II 32   III 45

F Modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero dato affinché quello dato sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

Risposta: Per garantire che tutte le condizioni di Bellman siano soddisfatte in senso stretto, basta modificare, tra gli archi fuori dall'albero, $c_{53} > 7$, $c_{54} > 1$, $c_{75} > 4$ e $c_{71} > 12$.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati nel grafo seguente, dove per ogni arco si riportano il costo, la capacità e il flusso corrente, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il vettore degli sbilanciamenti dello pseudoflusso mostrato è:

I $[-1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1]$ II $[0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0]$ III $[-2\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,2]$

B Il costo totale dello pseudoflusso x è:

I 15 II 17 III 25

C Quali dei seguenti cicli sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso (l'ordine dei nodi indica il verso):

I $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ II $2 \to 5 \to 4 \to 2$ III entrambi i precedenti

D Quali dei seguenti cammini sono aumentanti rispetto allo pseudoflusso:

I $1 \to 2 \to 5$ II $1 \to 3 \to 5$ III entrambi i precedenti

E Quale dei seguenti cicli ha costo negativo:

I $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ II $2 \to 4 \to 5 \to 2$ III entrambi i precedenti

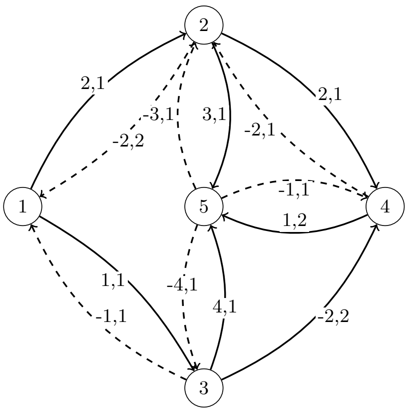
F Si dica se lo pseudoflusso x è ammissibile; altrimenti, si indichi come costruirne uno ammissibile e si dica se è ottimo. In caso contrario, trovare la soluzione ottima. Giustificare tutte le risposte.

Risposta: Lo pseudoflusso non è ammissibile in quanto presenta sbilanciamenti non nulli (si veda A). Per ottenere uno pseudoflusso ammissibile si può inviare una unità di flusso lungo il cammino aumentante $1 \to 2 \to 5$ sul grafo residuo (a). Il flusso ottenuto di costo 20 (vedasi grafo (b)) non è minimale poiché nel grafo residuo (c) esiste il ciclo $C = 1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ che è aumentante (si veda C) e di costo negativo (si veda E). Il costo del ciclo è: $1 + (-2) - 2 - 2 = -5$.

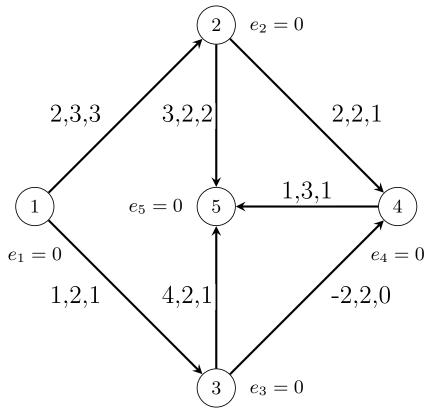
Successivamente si elimina il ciclo negativo inviando su di esso la massima quantità possibile: $\theta(C, x) = 1$. Ottenendo il grafo (d).

Il costo dello pseudoflusso diminuisce di 5 unità. Il nuovo flusso è ammissibile ma presenta un ciclo orientato di costo negativo nel grafo residuo (e): $C = 3 \to 4 \to 5 \to 3$ di costo $-4 - 2 + 1 = 5$ su cui è possibile inviare la quantità $\theta(C, x) = 1$.

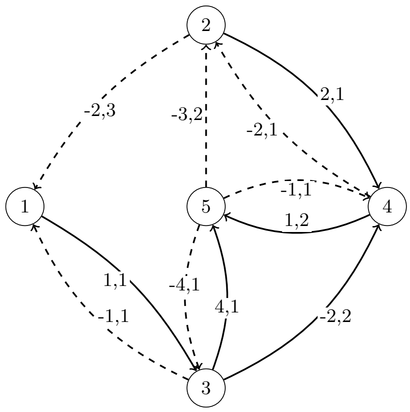
Il costo dello pseudoflusso diminuisce ulteriormente di 5 unità. Il nuovo flusso è ammissibile (grafo (f)) e non presenta cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo (g), perchè possiamo trovarvi l'albero dei cammini minimi (in (i) si vedano le etichette e i predecessori), quindi è minimale. Essendo ammissibile e minimale, esso è ottimo, con costo: $\boxed{cx^* = 5}$.


2
1
5
4
3
2,1
-3,1
-2,2
3,1
-2,1
2,1
-1,1
1,2
1,1
-4,1
-1,1
4,1
-2,2

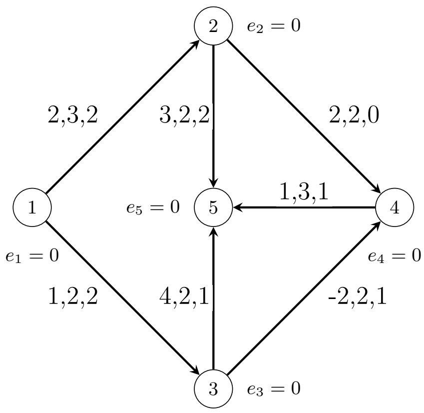
(a)


2
$e_2 = 0$
1
$e_1 = 0$
5
$e_5 = 0$
4
$e_4 = 0$
3
$e_3 = 0$
2,3,3
3,2,2
2,2,1
1,3,1
1,2,1
4,2,1
-2,2,0

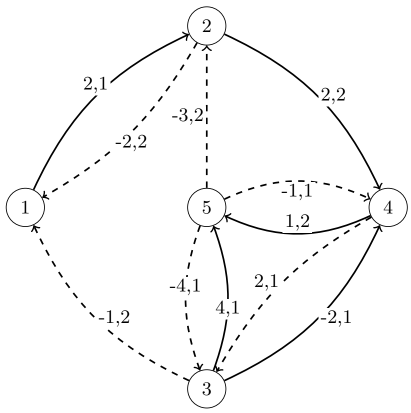
(b)


2
1
5
4
3
-2,3
-3,2
-2,1
2,1
-1,1
1,2
1,1
-4,1
-1,1
4,1
-2,2

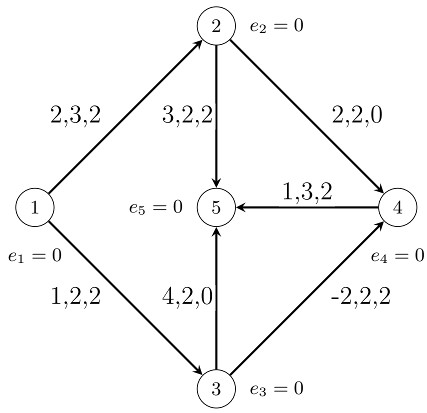
(c)


2
$e_2 = 0$
1
$e_1 = 0$
5
$e_5 = 0$
4
$e_4 = 0$
3
$e_3 = 0$
2,3,2
3,2,2
2,2,0
1,3,1
1,2,2
4,2,1
-2,2,1

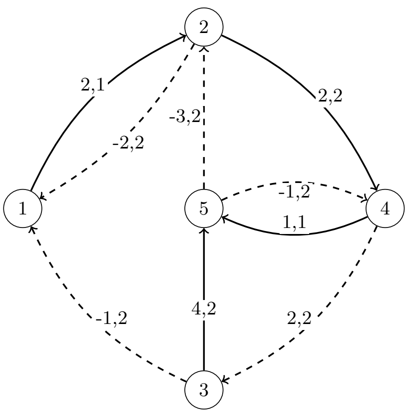
(d)


2
1
5
4
3
2,1
-2,2
-3,2
2,2
-1,1
1,2
-4,1
2,1
4,1
-1,2
-2,1

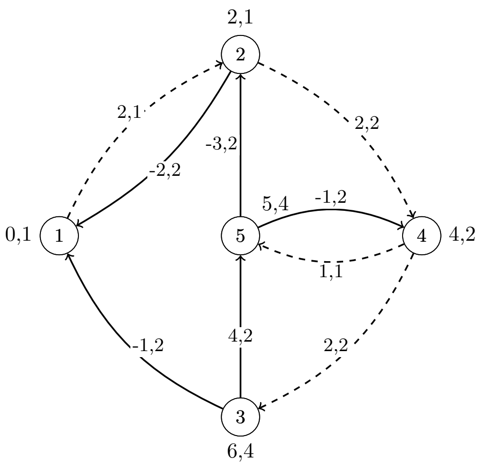
(e)


2
$e_2 = 0$
1
$e_1 = 0$
5
$e_5 = 0$
4
$e_4 = 0$
3
$e_3 = 0$
2,3,2
3,2,2
2,2,0
1,3,2
1,2,2
4,2,0
-2,2,2

(f)


2
1
5
4
3
2,1
-2,2
-3,2
2,2
-1,2
1,1
-1,2
4,2
2,2

(g)


2,1
2
0,1
1
5
4
4,2
3
6,4
2,1
-2,2
-3,2
2,2
5,4
-1,2
1,1
-1,2
4,2
2,2

(i)

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, al problema di *PL* dato qui accanto. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

A Per $B = \{1\,,\,2\}$ si può affermare che

I è una base duale ammissibile II è una base primale degenere III entrambe le cose sono vere

B Per $B = \{1\,,\,3\}$ si può affermare che

I è una base duale ammissibile II è una base duale degenere III entrambe le cose sono vere

C Per la base corrente $B = \{3\,,\,4\}$ l'indice entrante è:

I nessuno II $k = 2$ III $k = 1$

D Per la base corrente $B = \{3\,,\,4\}$ l'indice uscente è:

I $h = 3$ II $h = 4$ III nessuno

E Per la base $B = \{3\,,\,4\}$, la direzione di decrescita è:

I $d = [1\,,\,0\,,\,-2\,,\,-3\,,\,0]$ II $d = [1\,,\,0\,,\,-1\,,\,-3\,,\,0]$ III $d = [0\,,\,1\,,\,-1\,,\,-2\,,\,0]$

F Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{3\,,\,4\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando algebricamente tutte le risposte.

Risposta: Data la base $B = \{3\,,\,4\}$, abbiamo la matrice di base e il vettore dei termini noti associati:

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare le soluzioni primale e duale corrispondenti.

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \bar{y}_B = c_B^T A_B^{-1}.$$

Con $c_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$, otteniamo:

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Per valutare l'ottimalità della soluzione, verifichiamo se il punto primale rispetta tutti i vincoli: $A_N \bar{x} \leq b$. Notiamo che il primo vincolo non è soddisfatto; perciò scegliamo l'indice $k = 1$, che identifica la riga entrante.

Dobbiamo ora calcolare la direzione di crescita:

$$\eta = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il vettore η ha tutte le componenti positive, quindi il test di illimitatezza è superato. Calcoliamo quindi il passo di crescita:

$$\theta = \min \left\{ \frac{y_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0 \right\} = \left\{ \frac{5}{2}, \frac{6}{3} \right\} = \left\{ \frac{5}{2}, 2 \right\}.$$

Il valore minimo è $\theta = 2$, corrispondente all'indice $h = 4$, che quindi esce dalla base.
La nuova base è $B = \{1\,,\,3\}$. La matrice di base e il vettore dei termini noti associati sono:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Da cui si ottengono le nuove soluzioni di base:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \bar{y}_B = c_B^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'ottimalità, controlliamo i vincoli fuori base:

$$A_N \bar{x} \leq b.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Tutti i vincoli sono soddisfatti, quindi la soluzione è ottima. Il valore ottimo è:

$$c^T \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 10.$$

5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non crescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 0. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & & \\ & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0\,,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_4\,, x_1\,, x_2\,, x_3\}$ II $\{x_3\,, x_2\,, x_1\,, x_4\}$ III $\{x_2\,, x_4\,, x_1\,, x_3\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è a componenti intere

II La soluzione dell'euristica al nodo radice cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 2

III nessuna delle precedenti è corretta

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 32/3$ II $\underline{z} = 9$, $\bar{z} = 9$ III $\underline{z} = 25/3$, $\bar{z} = 9$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_2 II x_2, x_3 III x_4, x_1, x_2

E Quali sono le migliori valutazioni superiore ed inferiore globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 9$, $\bar{z} = 9$ II $z = 25/3$, $\bar{z} = 9$ III $z = 9$, $\bar{z} = 10$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo e ottenute risolvendo il rilassamento?

I nessuna II $[1\,, 0\,, 0\,, 1]$, $[0\,, 1\,, 0\,, 0]$ III $[1\,, 0\,, 0\,, 1]$, $[1\,, 0\,, 0\,, 1]$, $[0\,, 1\,, 1\,, 0]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno due nodi per ottimalità (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

II L'algoritmo non chiude nessun nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$), ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

III entrambe le precedenti sono corrette

H Modificare il peso del primo oggetto in modo che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.

Risposta: Affinché l'algoritmo termini direttamente alla radice, occorre che la soluzione del rilassamento sia a componenti intere: perché ciò avvenga, occorre che la somma dei pesi degli oggetti presi nello zaino secondo l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente sia uguale al volume dello zaino. È quindi possibile modificare il peso del primo oggetto, ponendolo uguale a 2, ottenendo la soluzione intera del rilassamento $[1\,, 0\,, 0\,, 1]$.