1) La piattaforma digitale LantaẼngos si dedica all'insegnamento di lingue costruite (conlang) come il Klingon, il Dothraki e l'Alto Valyriano. In vista delle vacanze estive, la piattaforma è in procinto di riorganizzare i percorsi di apprendimento settimana per settimana, basati su attività didattiche brevi per gli utenti già iscritti.

I docenti di LantaẼngos hanno preparato un insieme finito di attività J, dove ogni attività $j \in J$ rappresenta un esercizio relativo allo studio delle lingue della piattaforma. Ogni attività è caratterizzata da una durata t_j e da un beneficio didattico b_{ij}, che può dipendere dall'utente $i \in I$, per modellare la natura personalizzata dell'apprendimento. Le attività sono suddivise in categorie linguistiche appartenenti all'insieme $C = \{\text{grammatica}, \text{ascolto}, \text{produzione orale}, \text{vocabolario}, \text{revisione}\}$. L'insieme delle attività J è partizionato nei sottoinsiemi J_c, con $c \in C$, dove ciascun sottoinsieme contiene le attività appartenenti alla corrispondente categoria linguistica. L'orizzonte temporale è dato dai giorni $D = \{1, \dots, 7\}$.

Per ogni utente i e giorno d, è noto il tempo massimo disponibile per lo studio T_{id}. Eventuali eccedenze rispetto a tale limite sono ammesse, ma penalizzate tramite variabili di sforamento $o_{id} \geq 0$, pesate nel criterio di ottimizzazione mediante il parametro α_i, che rappresenta la tolleranza dell'utente al sovraccarico. La variabile decisionale $x_{jd} \in \{0, 1\}$, invece, assume valore 1 se l'attività j viene assegnata al giorno d. Ogni attività può essere assegnata al massimo una volta nell'intero orizzonte settimanale. Si noti che le attività saranno uguali per tutti gli studenti, che potranno accedervi in forma asincrona.

Il numero totale di attività selezionate appartenenti a ogni categoria $c \in C$ deve essere almeno pari a una soglia minima m^c. Questo garantisce un apprendimento bilanciato tra le diverse competenze linguistiche. Per favorire la varietà didattica all'interno della stessa giornata di studio, inoltre, si limita a due la concentrazione di attività della stessa categoria nello stesso giorno.

Per ridurre il rischio di sovraccarico articolatorio dovuto alle molte consonanti glottali delle lingue in questione (specialmente del Klingon), le attività di *produzione orale* non possono essere assegnate in giorni consecutivi.

Infine, le attività di *revisione* possono essere assegnate solo in presenza di almeno un'attività di *grammatica* nello stesso giorno.

Uno dei docenti di Alto Valyriano, nel suo tempo libero, studia Ricerca Operativa (o Qintyr Vēdjor, come preferisce chiamarla) ed è stato incaricato di definire un modello di programmazione lineare intera mista con l'obiettivo di massimizzare il beneficio didattico totale delle attività assegnate, penalizzando eventuali sforamenti del tempo disponibile.

domanda a) Selezionare, tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti, tutti quelli necessari a completare la formulazione. Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $z_d \in \{0, 1\}, \quad \sum_{j \in J} x_{jd} \leq |J| z_d, \quad z_d \leq \sum_{j \in J} x_{jd}, \quad d \in D$

B SI NO $\sum_{j \in J} t_j x_{jd} \leq T_{id} z_d \quad \forall i \in I,\ d \in D$

C SI NO $\sum_{j \in J} t_j x_{jd} \leq T_{id} + o_{id} \quad \forall i \in I,\ d \in D$

D SI NO $\sum_{j \in J} t_j x_{jd} \leq (T_{id} + o_{id}) z_d \quad \forall i \in I,\ d \in D$

E SI NO $\sum_{d \in D} x_{jd} z_d \leq 1 \quad \forall j \in J$

F SI NO $\sum_{d \in D} x_{jd} = 1 \quad \forall j \in J$

G SI NO $\sum_{d \in D} x_{jd} \leq 1 \quad \forall j \in J$

H SI NO $\sum_{j \in J_c} \sum_{d \in D} x_{jd} \geq m^c \quad \forall c \in C$

I SI NO $\sum_{d \in D} x_{jd} \geq m^c \quad \forall j \in J_c, c \in C$

J SI NO $\sum_{j \in J_c} x_{jd} \leq 2 z_d \quad \forall c \in C,\ d \in D$

K SI NO $\sum_{j \in J_c} x_{jd} \leq 2 \quad \forall c \in C,\ d \in D$

L SI NO $\sum_{j \in J_{orale}} x_{jd} + \sum_{j \in J_{orale}} x_{j,d+1} \leq 1 \quad \forall d = 1, \dots, 6$

M SI NO $x_{jd} + x_{j,d+1} \leq 1 \quad \forall j \in J_{orale}, d = 1, \dots, 6$

N SI NO $x_{hd} \leq \sum_{j \in J_{grammatica}} x_{jd} \quad h \in J_{revisione}, \forall d \in D$

O SI NO $\sum_{j \in J_{revisione}} x_{jd} \leq \sum_{j \in J_{grammatica}} x_{jd} \quad \forall d \in D$

P SI NO $|J| \sum_{j \in J_{revisione}} x_{jd} \leq \sum_{j \in J_{grammatica}} x_{jd} \quad \forall d \in D$

Q SI NO $\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{d \in D} b_{ij} x_{jd} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{d \in D} \alpha_i o_{id} x_{jd}$ (funzione obiettivo)

R SI NO $\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{d \in D} b_{ij} x_{jd} - \sum_{i \in I} \sum_{d \in D} \alpha_i o_{id} z_d$ (funzione obiettivo)

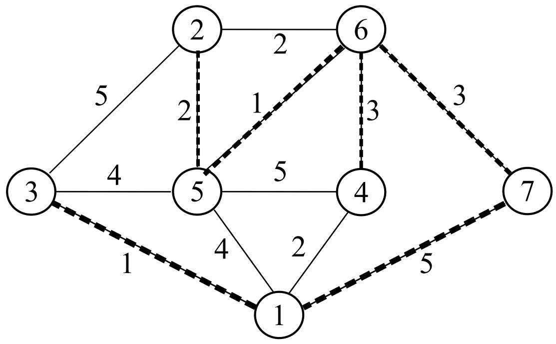
S SI NO $\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{d \in D} b_{ij} x_{jd} - \sum_{i \in I} \sum_{d \in D} \alpha_i o_{id}$ (funzione obiettivo)

domanda b) Al fine di garantire una progressione logica della difficoltà degli esercizi, si considerano delle propedeuticità tra le attività. Se un'attività k richiede il completamento di un'attività h allora k può essere assegnata solo in un giorno successivo a quello in cui h è stata svolta. Come cambierebbe la formulazione precedente in tal caso?

Risposta: Nella nuova formulazione basterebbe considerare un parametro σ_{hk} che assume valore 1 se un'attività k richiede il completamento di un'attività h; 0 in caso contrario e inserire il seguente vincolo:.

$$x_{kd} \leq \sum_{\tau=1}^{d-1} x_{h\tau} \quad \forall h \in J, k \in J, h \neq k, \sigma_{hk} = 1, \ d = 2, \ldots, 7$$

Per il problema dell'albero di copertura di costo minimo e la corrispondente soluzione (lati evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni sull'albero dato è corretta?

I Sostituendo il lato $\{2, 5\}$ con il lato $\{1, 4\}$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

II Esiste esattamente un altro albero di copertura che ha lo stesso costo di quello dato

III Entrambe le precedenti sono false

B Quali di questi lati non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

I nessuno II $\{1, 3\}$, $\{1, 7\}$ e $\{4, 6\}$ III nessuna delle precedenti

C Quali di questi lati non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

I $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 5\}$ e $\{4, 5\}$ II $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$ e $\{3, 5\}$ III nessuna delle precedenti

D Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

I 14 II 12 III 10

E Qual è il numero minimo di sostituzioni di archi che bisogna effettuare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

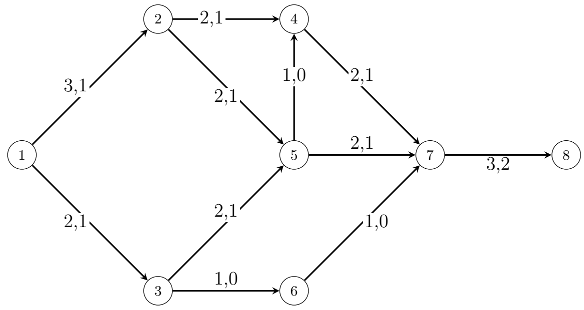
I 1 II 2 III 3

F I) Modificare il costo del minor numero possibile di lati dell'albero e fuori dall'albero affinché quello dato sia un albero di copertura di costo minimo. II) Quanti alberi di costo uguale a quello dato si possono ottenere inserendo il solo lato $\{4, 5\}$ nell'albero al posto di un altro lato dell'albero? Giustificare le risposte.

Risposta: I) L'insieme di tutti i lati che non rispettano la condizione di ottimalità per tagli è $\{\{1, 7\}, \{4, 6\}, \{6, 7\}\}$, mentre l'insieme di tutti i lati che non rispettano la condizione di ottimalità per cicli è $\{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$. Quindi possiamo porre $c_{17}, c_{46}, c_{67} \leq 2$, in modo tale che tutti i lati rispettino la condizione di ottimalità per tagli, oppure porre $c_{14}, c_{15}, c_{35} \geq 5$, in modo tale che tutti i lati rispettino la condizione di ottimalità per cicli.

II) Scambiando il lato $\{4, 5\}$ con un altro lato dell'albero, non si ottiene alcun albero di costo uguale a quello dato perché nel ciclo che si forma aggiungendo il lato $\{4, 5\}$ non è presente alcun lato di costo 5.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo $s = 1$ al nodo $t = 8$ ed il corrispondente flusso mostrati in figura, dove, per ogni arco, il primo valore rappresenta la capacità e il secondo valore il flusso attuale, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il flusso mostrato è:

I ammissibile di valore 2 — II ammissibile di valore 3 — III non ammissibile

B Ponendo il flusso $x_{25} = 0$ si ottiene:

I un flusso ammissibile ma non ottimo — II un flusso inammissibile — III il flusso ottimo

C Considerando il flusso ammissibile tra quello iniziale e quello ottenuto al punto precedente, quale affermazione è vera?

I $3 \to 6 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante

II $1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante

III entrambi i precedenti

D Considerando il flusso ammissibile, quale delle seguenti affermazioni è vera?

I $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante con capacità $\theta = 1$

II $1 \to 2 \to 4 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante con capacità $\theta = 2$

III $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 7 \to 8$ non è un cammino aumentante

E Quale dei seguenti tagli mostra che il flusso massimo non può essere superiore a 3:

I $N_s = \{1\}$ — II $N_t = \{8\}$ — III entrambi i precedenti

F Quale delle seguenti è una numerazione topologica dei nodi del grafo (si noti che il vettore riporta la posizione del nodo nella numerazione):

I $[1, 2, 3, 6, 4, 5, 7, 8]$ — II $[1, 3, 2, 6, 5, 4, 7, 8]$ — III entrambi le precedenti

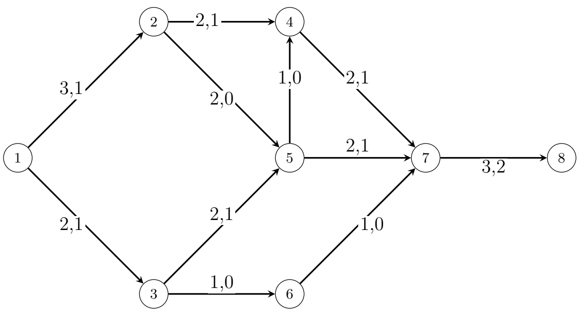
G Si esegua l'algoritmo di Edmonds–Karp partendo dal grafo con il flusso ammissibile. Qual è il valore del flusso ottimo. Mostrare tutti i passaggi e giustificare tutte le risposte.

Risposta: Per prima cosa consideriamo il grafo con il flusso ammissibile ottenuto al punto B, riportato in figura (a). Costruiamo quindi il corrispondente grafo residuo, mostrato in figura (b), e applichiamo l'algoritmo di Edmonds–Karp, cercando un cammino aumentante di lunghezza minima tramite una visita in ampiezza del grafo residuo. La visita individua il cammino aumentante $1 \to 2 \to 4 \to 7 \to 8$ con capacità residua $\theta = 1$.

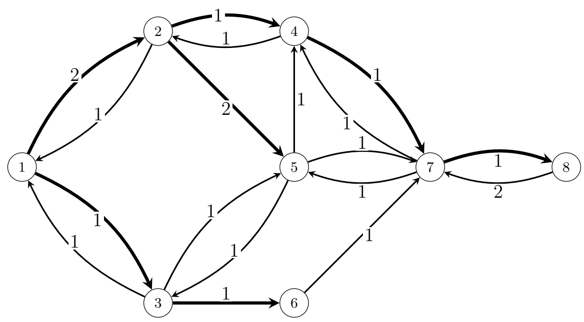
Aggiorniamo pertanto il flusso lungo tale cammino, ottenendo il nuovo flusso riportato in figura (c), e costruiamo il corrispondente grafo residuo (d).

Nel nuovo grafo residuo non esistono più cammini dal nodo sorgente s al nodo pozzo t. Per il teorema di correttezza dell'algoritmo di Edmonds–Karp, il flusso ottenuto è quindi massimo e ha valore pari a 3.

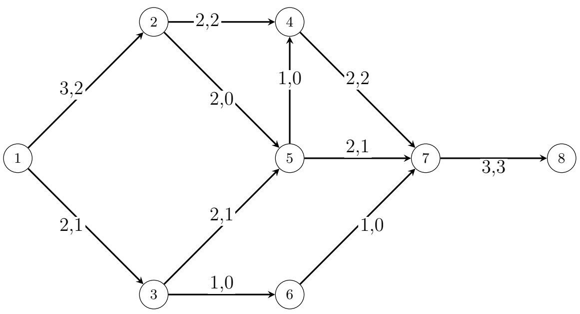
Il taglio minimo associato è dato da $N_t = 8$, la cui capacità coincide con il valore del flusso massimo trovato.


1
2
3
4
5
6
7
8
2,1
3,1
2,0
1,0
2,1
2,1
2,1
2,1
1,0
1,0
3,2

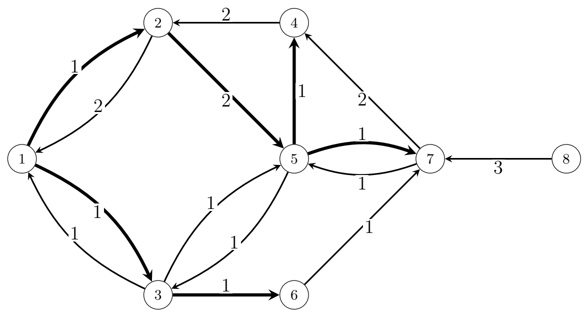
(a)


1
2
3
4
5
6
7
8
1
1
2
1
2
1
1
1
1
1
1
1
2
1
1
1
1
1
1

(b)


1
2
3
4
5
6
7
8
2,2
3,2
2,0
1,0
2,2
2,1
3,3
2,1
2,1
1,0
1,0

(c)


1
2
3
4
5
6
7
8
2
1
2
2
1
2
1
1
3
1
1
1
1
1
1

(d)

4) Si consideri il problema di *PL* dato qui accanto. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 4x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

A Quale delle seguenti affermazioni è vera rispetto alla base $B = \{3, 4\}$?

I è duale ammissibile   II è primale ammissibile   III nessuna delle precedenti

B Quale delle seguenti affermazioni è vera rispetto alla base $B = \{4, 5\}$?

I è primale degenere   II è duale ammissibile   III è primale non degenere

C Quale delle seguenti affermazioni è vera rispetto alla base $B = \{1, 3\}$?

I è primale e duale ammissibile   II è primale non ammissibile e duale ammissibile   III è primale degenere

D Si consideri il poliedro definito dai soli vincoli 3 e 4. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

I la regione ammissibile è vuota

II il poliedro ha almeno una direzione di linearità

III il poliedro è limitato

E Data la base $B = \{1, 2\}$, qual è l'indice entrante determinato dall'algoritmo del simplesso primale?

I $k = 3$ II $k = 5$ III nessuno

F Si descrivano le iterazioni del simplesso primale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$, giustificando algebricamente tutti i passaggi.

Risposta: Applichiamo l'algoritmo del simplesso primale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$ e dalla matrice di base corrispondente. Troviamo le soluzioni primale e duale corrispondenti:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \qquad b_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad c_B^T = [4, 1]$$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B^T = c_B^T A_B^{-1} = [4, 1] \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = [-2/3, 7/3]$$

Poiché $\bar{y}_1 < 0$, la soluzione non è ottima. Perciò l'indice uscente sarà:

$$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 1$$

Calcoliamo la direzione di crescita:

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$$

con

$$u_{B(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi = -\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

Ed effettuiamo il test di illimitatezza:

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_N \xi = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Poiché esiste almeno una componente positiva, il problema non è illimitato. Le componenti positive sono date dalle righe 3 e 5.

$$\lambda = \min \left\{ \frac{b_3 - A_3\bar{x}}{A_3\xi} \,, \frac{b_5 - A_5\bar{x}}{A_5\xi} \right\} = \left\{ \frac{3 - [\,1\,,\,0\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{1/3} \,, \frac{0 - [\,0\,,\,-1\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{2/3} \right\} = 3 = \bar{\lambda}$$

Per la regola anticiclo di Bland, scegliamo $k = 3$. Aggiorniamo la base e calcoliamo le nuove soluzioni primale e duale:

$$B = \{\,2\,,\,3\,\}$$

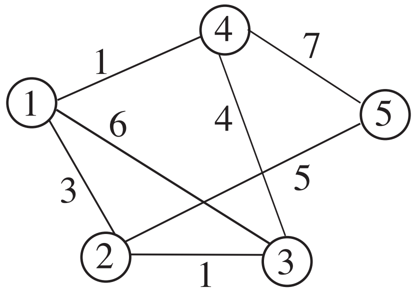
$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B 1^T = c_B^T A_B^{-1} = [\,4\,,\,1\,] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [\,1\,,\,2\,] \geq [\,0\,,\,0\,]$$

La soluzione duale è ammissibile, quindi la soluzione primale è ottima, con valore 12:

$$x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad z^* = c^T x^* = [\,4\,,\,1\,] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 12$$



5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal nodo 3 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell'1-albero (se ve n'è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l'albero delle decisioni è visitato in ampiezza. I figli di ogni nodo nell'albero delle decisioni vengono visitati in ordine lessicografico crescente dei corrispondenti archi fissati a zero (ad esempio, il nodo corrispondente a fissare a zero $\{1\,,\,2\}$ viene visitato prima di quello corrispondente a $\{1\,,\,3\}$). Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I il lato $\{1\,,\,2\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano calcolato dall'euristica.

II l'1-albero di costo minimo calcolato al nodo radice è un ciclo hamiltoniano.

III entrambe le precedenti sono false.

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\overline{z}$ al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = +\infty$ II $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = 14$ III $\underline{z} = 13$, $\overline{z} = 18$

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I x_{14}, x_{34}, x_{45} II x_{12}, x_{23}, x_{25} III nessuna (l'algoritmo termina)

D Si consideri l'esecuzione dell'algoritmo dopo aver visitato il nodo radice ed i suoi figli. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I almeno un nodo viene chiuso per valutazione inferiore

II nessun nodo viene chiuso per inammissibilità

III entrambe le precedenti sono false

E Quali sono le migliori valutazioni inferiore e superiore dopo aver visitato il nodo radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = +\infty$ II $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = 14$ III $\underline{z} = 13$, $\overline{z} = 18$

F Si aggiunga il lato $\{3\,,\,5\}$. È possibile fissare il suo costo affinché sia maggiore o uguale a 4 e l'algoritmo termini con una soluzione ottima al nodo radice?

Risposta: Indipendentemente dal costo c_{35}, la soluzione ammissibile ottenuta dall'euristica del vicino più vicino sarebbe $\{\{2\,,\,3\}\,,\{1\,,\,2\}\,,\{1\,,\,4\}\,,\{4\,,\,5\}\,,\{3\,,\,5\}\}$ di costo $\overline{z} = 12 + c_{35}$. Tuttavia, l'1-albero di costo minimo calcolato dal rilassamento al nodo radice non potrebbe mai coincidere con un ciclo Hamiltoniano, quindi non esiste alcun valore $c_{35} > 4$ per cui l'algoritmo termini al nodo radice:

- se $c_{35} \in [4, 5]$, si otterrebbe l'1-albero $\{\{2\,,\,3\}\,,\{1\,,\,4\}\,,\{1\,,\,2\}\,,\{3\,,\,5\}\,,\{4\,,\,3\}\}$ e il nodo 3 avrebbe tre lati incidenti
- se $c_{35} > 5$, si otterrebbe l'1-albero $\{\{2\,,\,3\}\,,\{1\,,\,4\}\,,\{1\,,\,2\}\,,\{2\,,\,5\}\,,\{4\,,\,3\}\}$ e il nodo 2 avrebbe tre lati incidenti