1) Renzo Tramaglino e Lucia Mondella si sposano! Finalmente, nonostante le mille traversie, dalle ingerenze del perfido don Rodrigo e dei suoi bravi scagnozzi, all'ignavia di Don Abbondio, dai tumulti milanesi alla peste, i due promessi sposi decidono di convolare a nozze. A questo punto, una volta ringraziata la divina provvidenza per averli ricongiunti, i promessi sposi si affrettano a organizzare la cerimonia e il banchetto. L'intero villaggio è invitato e bisogna decidere l'assegnazione dei posti ai tavoli per il pranzo di nozze.

A ciascun invitato $i \in I$ deve essere assegnato esattamente un tavolo: non vorremmo certo che qualcuno restasse escluso... Viene predisposto un numero sufficientemente grande T di tavoli, ciascuno con C_t posti, e l'obiettivo è rendere il pranzo il più piacevole e tranquillo possibile: non vorremmo certo che qualche altro mascalzone, animato da pessime intenzioni, rovinasse il matrimonio... A tal fine, per ogni coppia $\{ i , j \} \in I \times I$ di invitati, i promessi sposi stabiliscono un parametro c_{ij} che rappresenta il grado di affinità (se positivo), di incompatibilità (se negativo) tra i due invitati. Si vuole quindi massimizzare il grado di compatibilità totale per ogni coppia di invitati.

Per favorire la convivialità tra gli invitati, i promessi sposi vogliono che a ogni tavolo siano presenti non più di P_{bt} parenti della sposa e P_{ht} parenti dello sposo. Si indichi, a tal fine, P_b l'insieme degli invitati che sono anche parenti della sposa e P_h l'insieme degli invitati che sono anche parenti dello sposo. Si assuma inoltre che $P_b \cap P_h = \emptyset$. Contemporaneamente si vuole che, quando al tavolo siano presenti un parente della sposa e un parente dello sposo, non siano presenti amici, cioè invitati $k \in I \setminus (P_h \cup P_b)$, per favorire l'affiatamento tra le due famiglie.

Ovviamente sposo e sposa devono sedere allo stesso tavolo. Per convenzione, lo sposo e la sposa sono considerati tra gli invitati e hanno il grado di compatibilità massimo; la loro partecipazione al tavolo $t \in T$ è indicata dalle variabili binarie x_{ht} e x_{bt}, rispettivamente. In generale, si individui la famiglia di variabili decisionali x_{it} pari a 1 se l'invitato $i \in I$ siede al tavolo $t \in T$ e 0 altrimenti.

Si aiutino i promessi sposi nell'organizzazione dei tavoli per il pranzo di nozze, formulando un problema di programmazione lineare intera (PLI) e, soprattutto, si scongiuri ogni possibile inconveniente e trambusto, che ispirino un epigono di Alessandro Manzoni e traumatizzare ulteriori generazioni di scolari con il suo romanzo...

domanda a) Selezionare, tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti, tutti quelli necessari a completare la formulazione. Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $z_{ijt} \in \{ 0 , 1 \} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in I,\ \forall t \in T$

B SI NO $z_{ijt} \leq x_{it} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in I,\ \forall t \in T$

C SI NO $z_{ijt} \leq x_{jt} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in I,\ \forall t \in T$

D SI NO $z_{ijt} \geq x_{it} + x_{jt} - 1 \quad \forall i \in I,\ \forall j \in I,\ \forall t \in T$

E SI NO $\sum_{t \in T} x_{it} = 1 \quad \forall i \in I$

F SI NO $\sum_{i \in i} \sum_{t \in T} x_{it} = 1$

G SI NO $\sum_{i \in I} x_{it} \leq C_t \quad \forall t \in T$

H SI NO $\sum_{i \in I} x_{it} \geq C_t \quad \forall t \in T$

I SI NO $x_{ht} \leq x_{bt} \quad \forall t \in T$

J SI NO $x_{ht} \geq x_{bt} \quad \forall t \in T$

K SI NO $\sum_{i \in P_h} x_{it} \leq P_{ht} \qquad \sum_{i \in P_b} x_{it} \leq P_{bt} \quad \forall t \in T$

L SI NO $x_{it} \leq P_{ht} \quad \forall i \in P_h,\ \forall t \in T \qquad x_{it} \leq P_{bt} \quad \forall i \in P_b,\ \forall t \in T$

M SI NO $x_{kt} \geq 2 - x_{it} + x_{jt} \quad \forall k \in I \setminus (P_h \cup P_b),\ \forall i \in P_h,\ \forall j \in P_b,\ \forall t \in T$

N SI NO $x_{kt} \geq x_{it} + x_{jt} \quad \forall k \in I \setminus (P_h \cup P_b),\ \forall i \in P_h,\ \forall j \in P_b,\ \forall t \in T$

O SI NO $x_{kt} \leq 2 - x_{it} + x_{jt} \quad \forall k \in I \setminus (P_h \cup P_b),\ \forall i \in P_h,\ \forall j \in P_b,\ \forall t \in T$

P SI NO $\max \sum_{(i,j) \in I \times I : i > j} \sum_{t \in T} c_{ij} z_{ijt}$ (funzione obiettivo)

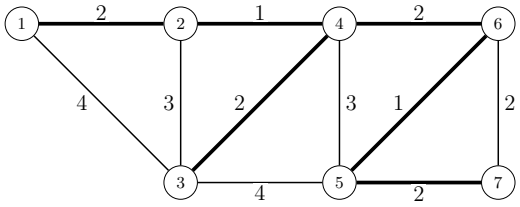
Q SI NO $\max \sum_{(i,j) \in I \times I : i > j} \sum_{t \in T} c_{ij} x_{it} x_{jt}$ (funzione obiettivo)

domanda b) La regola iniziale, secondo cui un amico può essere presente a un tavolo solo in assenza di parenti della sposa e dello sposo, viene completamente stravolta: i promessi sposi richiedono infatti che un amico possa sedersi a un tavolo solo se fossero presenti contemporaneamente anche un parente della sposa e uno dello sposo. Come cambierebbe la formulazione?

Risposta: Nella nuova formulazione basterebbe modificare il vincolo O nel modo seguente:

$$x_{kt} \leq x_{it} + x_{jt} \quad \forall k \in I \setminus (P_h \cup P_b),\ \forall i \in P_h,\ \forall j \in P_b,\ \forall t \in T\,.$$

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo per il grafo in figura e la soluzione data dai lati evidenziati. Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

I sostituendo il lato $\{4, 6\}$ con il lato $\{4, 5\}$ si ottiene un altro albero di stesso costo

II esiste almeno un altro albero di copertura minimo distinto da quello indicato

III nessuna delle due affermazioni precedenti

B Quale lato non soddisfa la condizione di ottimalità per i tagli:

I nessuno II $\{4, 6\}$ III $\{2, 4\}$

C Per quali cicli il lato $\{4, 5\}$ soddisfa la condizione di ottimalità per cicli:

I $4 \to 6 \to 5 \to 4$ II $4 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4$ III entrambi

D Quali sostituzioni di lati bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo:

I $\{4, 6\}$ con $\{4, 5\}$ II nessuna III $\{3, 4\}$ con $\{2, 3\}$

E Una volta ottenuto l'albero ricoprente di costo minimo T^*, sia il parametro positivo α il nuovo costo del lato $\{3, 4\}$. Per quali valori di α non si rispettano più le condizioni di ottimalità per tagli?

Risposta: Il lato $\{3, 4\}$ appartiene a T^*. Rimuovendolo si ottiene il taglio:

$$S = \{3\}, \quad V \setminus S = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}.$$

Gli archi che attraversano il taglio sono:

$$\{1, 3\} \text{ con costo } 4, \quad \{2, 3\} \text{ con costo } 3, \quad \{3, 5\} \text{ con costo } 4, \quad \{3, 4\} \text{ con costo } \alpha.$$

La condizione di ottimalità per i tagli richiede:

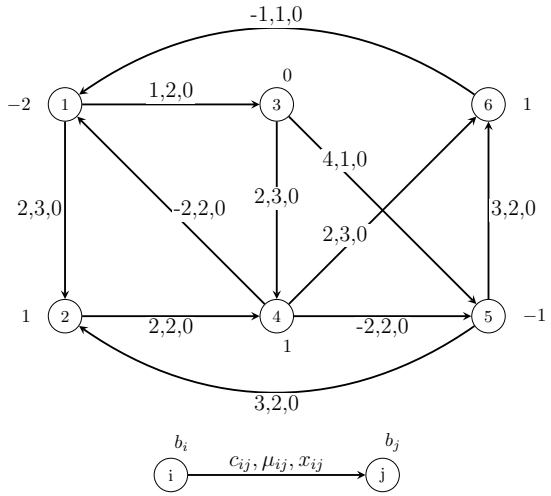
$$\alpha \leq 3.$$

Quindi la condizione viene violata se e solo se:

$$\boxed{\alpha > 3}.$$

Per $\alpha = 3$ si ha degenerazione, ma non violazione: esiste un altro MST di costo uguale.

3) Per il problema del flusso di costo minimo ed il corrispondente pseudoflusso mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Considerando l'*Algoritmo dei Cammini Minimi Successivi*, e un flusso iniziale nullo, come in figura, l'inizializzazione prevede di:

I saturare tutti gli archi di costo negativo.

II saturare tutti gli archi di costo positivo.

III cancellare tutti i cicli aumentanti di costo negativo.

B Svolta l'inizializzazione, l'*Algoritmo dei Cammini Minimi Successivi* prevede il calcolo del vettore degli sbilanciamenti. Indicare il vettore degli sbilanciamenti corretto:

I $[-2, 1, 0, 1, 1, -1]$ II $[5, -1, 0, -5, 3, -2]$ III $[-5, 1, 0, 5, -3, 2]$

C Sia x lo pseudoflusso ottenuto dopo l'inizializzazione, G_x il grafo residuo ottenuto a partire dallo pseudoflusso x, e siano O_x e D_x gli insiemi delle sorgenti e dei pozzi, rispettivamente, associati a x. Quale delle seguenti risposte indica cammini aumentanti da O_x a D_x?

I $5 \to 4$ e $5 \to 3$ II $1 \to 4$ e $1 \to 2$ III $4 \to 6$ e $3 \to 5 \to 6$

D Qual è il costo dello pseudoflusso x ottenuto dopo l'inizializzazione?

I -9 II 10 III 0

E Qual è il costo del flusso di costo minimio?

I -10 II 10 III 8

F Si determini il flusso di costo minimo applicando l'*Algoritmo dei Cammini Minimi Successivi* fino al suo termine. Si giustifichi ogni passaggio dell'algoritmo, descrivendo l'individuazione dei cammini aumentanti di costo minimo, l'aggiornamento del flusso e della rete residua.

Si osservi che, qualora in una stessa iterazione siano disponibili più cammini di costo minimo, tali cammini possono essere utilizzati simultaneamente purché siano a due a due privi di archi in comune e tali da non determinare violazioni delle capacità residue associate ai nodi di origine e destinazione (rispettivamente offerta delle sorgenti e domanda dei pozzi). In tal caso, l'aggiornamento del flusso può essere effettuato in parallelo lungo tutti i cammini selezionati, nel rispetto delle capacità residue della rete.

Al termine si riporti il flusso ottimo e il costo totale associato, verificando la condizione di ottimalità della soluzione ottenuta..

Risposta: Per prima cosa, eseguiamo l'inizializzazione dell'algoritmo, che consiste nel saturare tutti gli archi di costo negativo, ossia ponendo

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij} \geq 0, \\ \mu_{ij} & \text{se } c_{ij} < 0, \end{cases}$$

e nell'aggiornare gli sbilanciamenti mediante

$$e_i(x) = \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} - b_i,$$

ottenendo così uno pseudoflusso minimale, ovvero uno pseudoflusso per il quale non esistono cicli aumentanti di costo negativo.

Si ottiene pertanto il grafo riportato in Figura 1, il cui pseudoflusso ha costo pari a -9. Il corrispondente grafo residuo è mostrato in Figura 2. Su tale figura è inoltre evidenziato, mediante archi in grassetto, l'albero dei cammini minimi dai nodi con sbilanciamento positivo (O_x) ai nodi con sbilanciamento negativo (D_x).

Si osserva che il cammino $1 \to 2$ è aumentante, con

$$\theta = \min\{e_1, -e_2, \mu_{12}\} = 1.$$

Allo stesso modo, risultano aumentanti i cammini $1 \to 4$ e $1 \to 6$, rispettivamente con

$$\theta = \min\{e_1, -e_4, \mu_{14}\} = 2, \qquad \theta = \min\{e_1, -e_6, \mu_{16}\} = 1.$$

Il primo cammino è costituito da un unico arco concorde rispetto al grafo originale (dunque aggiungeremo θ unità di flusso su tale arco), mentre gli altri due sono composti da un unico arco discorde (dunque toglieremo θ unità di flusso su tali archi). Poiché tali cammini sono tra loro disgiunti e non interferiscono rispetto alle capacità residue delle sorgenti e dei pozzi coinvolti, essi possono essere applicati simultaneamente.

Si ottiene così il grafo in Figura 3, il cui pseudoflusso ha costo pari a 3, e il corrispondente grafo residuo in Figura 4. Nella stessa figura è riportato l'albero dei cammini minimi dai nodi di O_x ai nodi di D_x. Si individuano due ulteriori cammini aumentanti, anch'essi applicabili contemporaneamente:

$$5 \to 4, \qquad \theta = \min\{e_5, -e_4, \mu_{54}\} = 2,$$

costituito da un arco discorde, quindi toglieremo 2 unità di flusso dall'arco (4,5), e

$$5 \to 6, \qquad \theta = \min\{e_5, -e_6, \mu_{56}\} = 1,$$

costituito da un arco concorde, quindi porremo una unità di flusso sull'arco (5,6). Poiché i due cammini non interferiscono tra loro, possono essere aumentati simultaneamente.

Il nuovo grafo, con il corrispondente pseudoflusso x e i nuovi sbilanciamenti non nulli, è riportato in Figura 5. Il costo dello pseudoflusso corrente è pari a 5. Il grafo residuo associato è mostrato in Figura 6, nella quale è indicato anche l'albero dei cammini minimi da O_x a D_x.

Da tale albero si ricava il cammino aumentante

$$1 \to 3 \to 4,$$

con capacità

$$\theta = \min\{e_1, -e_4, \mu_{12}, \mu_{24}\} = 1.$$

Entrambi gli archi del cammino sono concordi rispetto al grafo originale; pertanto si incrementano di un'unità i corrispondenti flussi, ottenendo

$$x_{12} = x_{24} = 1.$$

Il nuovo grafo, contenente il flusso ammissibile x^* e caratterizzato da sbilanciamenti nulli, è riportato in Figura 7. Poiché tutti gli sbilanciamenti sono stati annullati, il flusso ottenuto è ammissibile e ottimo. Il suo costo totale è

$$cx^* = 8.$$

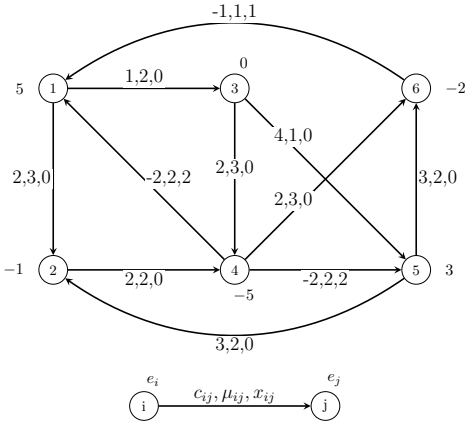


Figura 1: Grafo dopo l'inizializzazione.

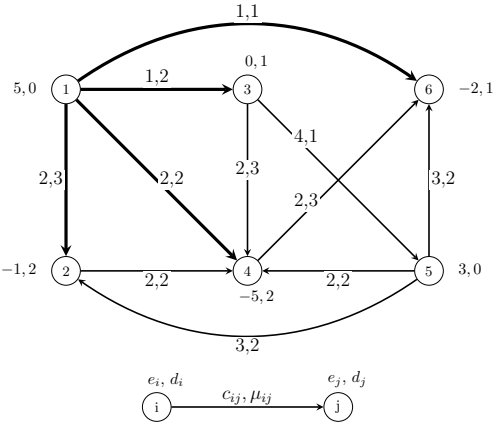


Figura 2: Grafo residuo e albero dei cammini minimi.

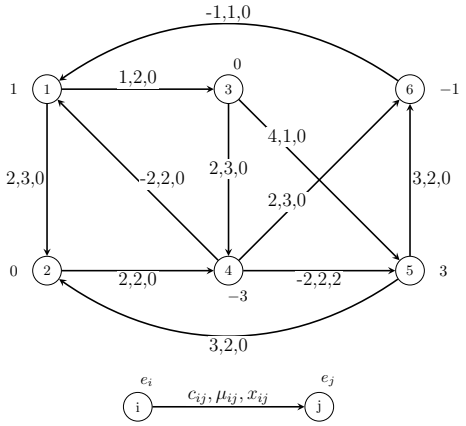


Figura 3: Grafo dopo l'aumento dei flussi dovuti ai primi tre cammini aumentanti.

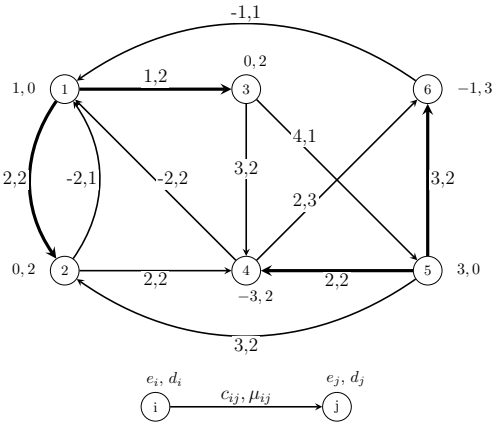


Figura 4: Grafo residuo e albero dei cammini minimi.

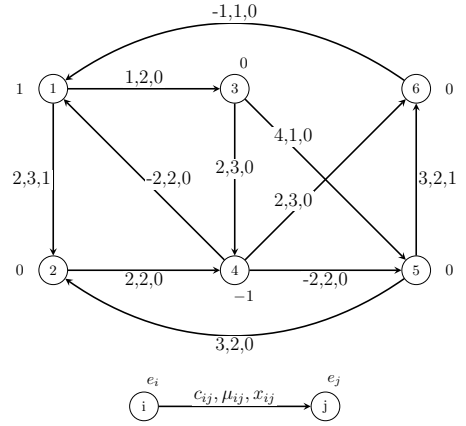


Figura 5: Grafo dopo l'aumento dei flussi dovuti ai nuovi due cammini aumentanti.

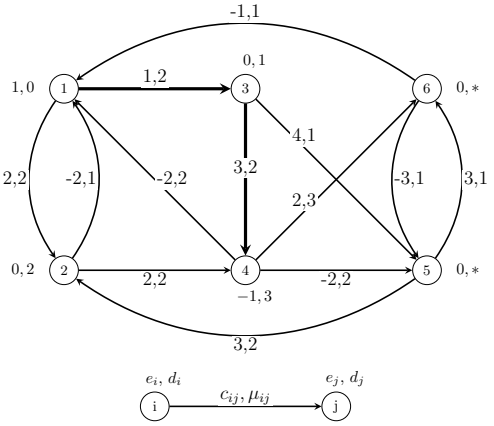


Figura 6: Grafo residuo e albero dei cammini minimi.

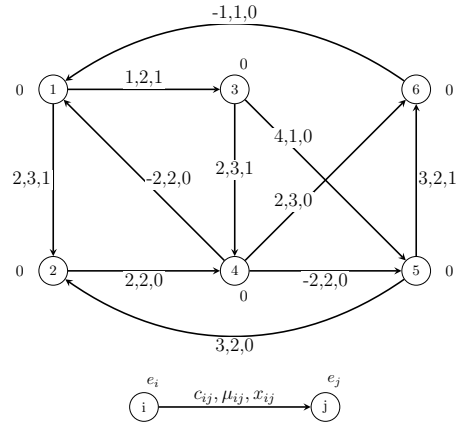
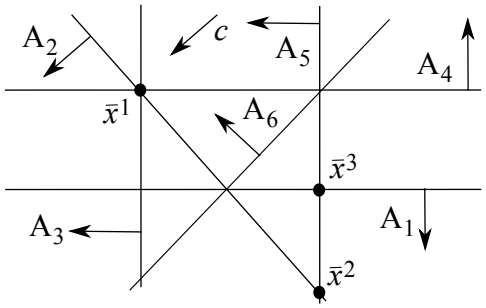


Figura 7: Grafo con il flusso ottimo.

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, al problema di PL rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c e A_2 sono collineari tra loro, ed anche A_1 ed A_4 , e A_3 ed A_5 rispettivamente lo sono. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Per $B = \{3, 4\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere II è una base duale non ammissibile III entrambe le cose

B Per $B = \{1, 5\}$ si può affermare che

I è una base primale ammissibile II è una base duale ammissibile III entrambe le cose

C Per $B = \{2, 3\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III entrambe le cose

D Per $B = \{3, 5\}$ si può affermare che

I non è una base II è una base duale ammissibile III nessuna delle due cose

E Per $B = \{1, 5\}$, l'indice entrante è

I $k = 1$ II $k = 2$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Per $B = \{2, 3\}$, l'indice entrante è

I $k = 2$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Per $B = \{2, 3\}$, dato l'indice entrante stabilito alla domanda precedente, l'indice uscente è

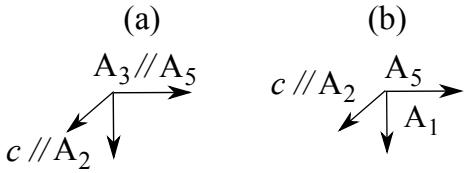
I $h = 2$ II $h = 3$ III nessuno (l'algoritmo termina)

H Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{2, 3\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{2, 3\}$, la soluzione primale di base $\bar{x}^1$, mostrata direttamente nella figura sopra, viola i vincoli 5 e 6; pertanto, $k = 5$ per la regola anticiclo di Bland (si veda F). Poiché $A_5 \in cono(A_2, A_3)$, come mostrato in (a) sotto, ed in effetti $A_5 \in cono(\{A_3\})$ essendo collineare con A_3 (con lo stesso verso): pertanto si ha $\eta_2 = 0$ ed $\eta_3 > 0$, da cui $h = 3$ (si veda G).

Alla seconda iterazione, quindi, $B = \{2, 5\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ viola solo il vincolo 1, come mostrato nella figura sopra, quindi $k = 1$. Come mostrato in (b), poiché $A_1 \in cono(A_2, A_5)$, si ha $\eta_1 > 0$ ed $\eta_5 > 0$; inoltre, $c \in cono(\{A_2\})$, essendo collineare con A_2 (con lo stesso verso), da cui $y_2 > 0$ e $y_5 = 0$ e pertanto, $h = 5$.

Alla terza iterazione, quindi, $B = \{1, 5\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^3$ non viola alcun vincolo, come mostrato nella figura sopra; pertanto, l'algoritmo termina avendo determinato che una soluzione di base primale e duale ammissibile (si vedano B e E).



5) Per il problema dello zaino qui accanto, si consideri il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti (costi unitari) non crescenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza, ossia Q è una fila (FIFO). Tra i due figli viene inserito in Q, e quindi esaminato, prima quello corrispondente alla variabile frazionaria posta uguale a 1. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0\,,\,1\} \end{array}$$

A Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente?

I $\{x_4\,,\,x_3\,,\,x_2\,,\,x_1\}$ II $\{x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,x_4\}$ III $\{x_2\,,\,x_4\,,\,x_1\,,\,x_3\}$

B Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è a componenti intere

II La soluzione dell'euristica al nodo radice non cambia se il lato destro del vincolo viene posto a 3

III nessuna delle precedenti è corretta

C Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\bar{z}$ calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $\underline{z} = 1$, $\bar{z} = 2$ II $\underline{z} = 2$, $\bar{z} = 8/3$ III $\underline{z} = 8/3$, $\bar{z} = 3$

D Su quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I x_3 II x_3, x_2, x_4 III x_1, x_2

E Quali sono le migliori valutazioni superiore ed inferiore globali $z \leq z(P) \leq \bar{z}$ disponibili quando l'algoritmo ha finito di visitare i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice ed i suoi figli)?

I $z = 2$, $\bar{z} = 2$ II $z = 8/3$, $\bar{z} = 3$ III $z = 2$, $\bar{z} = 5/2$

F Quali sono tutte le soluzioni ammissibili esplorate dall'algoritmo e ottenute risolvendo il rilassamento?

I nessuna II $[1\,,\,1\,,\,0\,,\,0]$, $[0\,,\,1\,,\,1\,,\,0]$ III $[0\,,\,1\,,\,1\,,\,0]$, $[1\,,\,0\,,\,1\,,\,0]$, $[1\,,\,0\,,\,0\,,\,1]$, $[1\,,\,1\,,\,0\,,\,0]$

G Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I L'algoritmo chiude almeno due nodi per ottimalità (la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera)

II L'algoritmo chiude almeno un nodo per la sola valutazione superiore ($z \geq \bar{z}(P_i)$, ma la soluzione ottima del rilassamento continuo non è intera)

III entrambe le precedenti sono corrette

H In quanti modi è possibile modificare il peso del primo oggetto in modo che l'algoritmo termini direttamente alla radice? Giustificare la risposta.

Risposta: Affinché l'algoritmo termini direttamente alla radice, occorre che la soluzione del rilassamento sia a componenti intere: perché ciò avvenga, occorre che la somma dei pesi degli oggetti presi nello zaino secondo l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente sia uguale al volume dello zaino. È quindi possibile modificare il peso del primo oggetto, ponendolo uguale a 3, ottenendo la soluzione intera del rilassamento $[1\,,\,1\,,\,0\,,\,0]$, dal momento che l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente prevede x_2 e x_1 rispettivamente al primo e al secondo posto, oppure maggiore di 3, ottenendo la soluzione intera del rilassamento $[0\,,\,1\,,\,1\,,\,0]$, dal momento che l'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente prevede x_2 e x_3 rispettivamente al primo e al secondo posto. Un ulteriore caso si verifica per $w_1 = 0$: in tal caso il rendimento del primo oggetto risulta massimo (essendo il suo peso nullo), per cui x_1 occupa il primo posto nell'ordinamento delle variabili per rendimento (costo unitario) non crescente. Poiché il primo oggetto non occupa capacità nello zaino, esso viene selezionato senza consumare volume; successivamente vengono selezionati anche x_2 e x_3, che saturano esattamente la capacità disponibile. La soluzione del rilassamento risulta pertanto direttamente intera, pari a $[1\,,\,1\,,\,1\,,\,0]$, con valore della funzione obiettivo $z = 3$.