1) È una tranquilla mattina all'aeroporto internazionale di Malpensa. Numerosi aeromobili sono pronti a partire dalle rispettive piazzole di sosta e devono raggiungere la pista di decollo attraversando la rete di vie di rullaggio dell'aeroporto.

Il responsabile della gestione del traffico a terra, esperto ricercatore operativo, deve organizzare i movimenti dei K aeromobili in modo da evitare conflitti e, allo stesso tempo, contenere il tempo complessivo necessario per raggiungere la pista. Ogni aeromobile $k \in K$ ha infatti una piazzola di origine $o_k \in N$, un punto di ingresso alla pista (destinazione) $d_k \in N$, l'istante t_k^0 in cui l'aeromobile è disponibile per iniziare il rullaggio e $\bar{t}_k \in T$ l'orario programmato di ingresso alla pista.

La rete di movimentazione a terra dell'aeroporto è rappresentata mediante un grafo orientato $G^S = (N, A^S)$, dove i nodi $i \in N$ rappresentano le posizioni significative dell'aeroporto (quali piazzole, incroci e punti di accesso alla pista), mentre gli archi $(i, j) \in A^S$ rappresentano i possibili movimenti degli aeromobili lungo le vie di rullaggio.

Per tenere conto simultaneamente della posizione degli aeromobili e dell'istante in cui essi occupano tale posizione, la rete viene trasformata in un *grafo spazio-temporale*. Sia $T = \{0, \dots, H\}$ l'insieme degli istanti temporali considerati. A ogni nodo fisico $i \in N$ e istante $t \in T$ corrisponde un nodo spazio-temporale (i, t). Il nodo (i, t) rappresenta quindi la presenza di un aeromobile nella posizione i all'istante t. Per ogni arco fisico $(i, j) \in A^S$ e per ogni istante t per cui sia possibile effettuare il movimento, viene introdotto un arco spazio-temporale $a = ((i, t), (j, t + \tau_{ij}))$, dove τ_{ij} rappresenta il tempo necessario per percorrere il tratto di rete compreso tra i e j. Per consentire agli aeromobili di attendere presso un nodo prima di proseguire, vengono inoltre introdotti archi di attesa del tipo $((i, t), (i, t + 1))$. In questo modo il grafo spazio-temporale permette di rappresentare non solo il percorso seguito da ciascun aeromobile, ma anche l'istante in cui ciascun tratto della rete viene attraversato.

Si indichi con V l'insieme dei nodi del grafo spazio-temporale e con A l'insieme dei suoi archi. Si assuma che ogni arco $a \in A$ possa essere percorso da al più un aeromobile alla volta. Percorrere un arco a ha un costo c_a. Tale ipotesi permette di modellare i conflitti tra aeromobili sulle vie di rullaggio. Per ogni nodo spazio-temporale $v \in V$ si definiscano gli insiemi degli archi entranti e uscenti: $\delta^-(v) = \{a \in A : a \text{ entra nel nodo } v\}$, $\delta^+(v) = \{a \in A : a \text{ esce dal nodo } v\}$.

Per ogni aeromobile $k \in K$ si consideri il nodo spazio-temporale di origine $s_k = (o_k, t_k^0)$. Si definisce inoltre l'insieme degli istanti nei quali l'aeromobile k può raggiungere la propria destinazione come $T_k = \{t \in T : t \geq t_k^0\}$. Di conseguenza, i possibili nodi spazio-temporali di arrivo dell'aeromobile k sono $\{(d_k, t) : t \in T_k\}$.

Per ogni aeromobile $k \in K$ e per ogni arco $a \in A$ si introduca la variabile binaria $x_{ka} = 1$ se l'aeromobile k percorre l'arco a, 0 altrimenti. Inoltre, per ogni $k \in K$ e $t \in T_k$, si introduca la variabile binaria $y_{kt} = 1$ se l'aeromobile k raggiunge la destinazione d_k all'istante t, 0 altrimenti. Infine, per ogni aeromobile $k \in K$, si introduca la variabile continua non negativa r_k, che rappresenta il ritardo dell'aeromobile rispetto all'orario programmato $\bar{t}_k$.

L'obiettivo del responsabile aeroportuale è formulare il problema di programmazione lineare intera mista che consenta di determinare i percorsi degli aeromobili nel grafo spazio-temporale, evitando conflitti nell'utilizzo delle vie di rullaggio e minimizzando il costo complessivo della movimentazione e i ritardi. Sia $\lambda > 0$ un parametro che rappresenta il peso attribuito ai ritardi.

domanda a) Selezionare, tra i vincoli, le funzioni obiettivo e gli ulteriori gruppi di variabili seguenti, tutti quelli necessari a completare la formulazione. Si considerino anche come già facenti parte della formulazione i vincoli di integralità sulle famiglie di variabili precedentemente enunciate. **Si selezioni esattamente una delle risposte SI oppure NO, non farlo significa non rispondere alla domanda e quindi essere penalizzati.**

A SI NO $\sum_{t \in T_k} y_{kt} = 1 \quad \forall k \in K$

B SI NO $\sum_{t \in T_k} y_{kt} \geq 1 \quad \forall k \in K$

C SI NO $\sum_{t \in T} y_{kt} \geq 1 \quad \forall k \in K$

D SI NO $\sum_{a \in \delta^+(v)} x_{ka} - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_{ka} = \begin{cases} 1 & \text{se } v = (o_k, t), t \in T_k, \\ 1 & \text{se } v = (d_k, t_k^0), \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \forall k \in K,\ \forall v \in V$

E SI NO $\sum_{a \in \delta^+(v)} x_{ka} - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_{ka} = \begin{cases} 1 & \text{se } v = (o_k, t), t \in T_k, \\ -1 & \text{se } v = (d_k, t_k^0), \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \forall k \in K,\ \forall v \in V$

F SI NO $\sum_{a \in \delta^+(v)} x_{ka} - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_{ka} = \begin{cases} -1 & \text{se } v = (o_k, t_k^0), \\ y_{kt} & \text{se } v = (d_k, t),\ t \in T_k, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \forall k \in K,\ \forall v \in V$

G SI NO $\sum_{a\in\delta^+(v)} x_{ka} - \sum_{a\in\delta^-(v)} x_{ka} = \begin{cases} 1 & \text{se } v = (o_k, t_k^0), \\ -y_{kt} & \text{se } v = (d_k, t),\ t \in T_k, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \forall k \in K,\ \forall v \in V$

H SI NO $\sum_{k\in K} x_{ka} \leq 1 \quad \forall a \in A$

I SI NO $\sum_{a\in A} x_{ka} \leq \sum_{t\in T_k} y_{kt} \quad \forall k \in K$

J SI NO $\sum_{a\in A} x_{ka} y_{kt} \leq 1 \quad \forall t \in T_k,\ \forall k \in K$

K SI NO $r_k \geq \sum_{t\in T_k} t\, y_{kt} \quad \forall k \in K$

L SI NO $r_k \leq \bar{t}_k \quad \forall k \in K$

M SI NO $r_k = \sum_{t\in T_k} t\, y_{kt} \quad \forall k \in K$

N SI NO $r_k \geq \sum_{t\in T_k} t\, y_{kt} - \bar{t}_k \quad \forall k \in K$

O SI NO $\max\left\{-\sum_{k\in K}\sum_{a\in A} c_a x_{ka} - \lambda \sum_{k\in K} r_k\right\}$ (funzione obiettivo)

P SI NO $\min\left\{\sum_{k\in K}\sum_{a\in A} x_{ka} + \sum_{k\in K} r_k\right\}$ (funzione obiettivo)

Q SI NO $\min\left\{\sum_{k\in K}\sum_{a\in A} c_a x_{ka} + \lambda \sum_{k\in K} r_k + \sum_{k\in K}\sum_{t\in T_k} y_{kt}\right\}$ (funzione obiettivo)

domanda b)

Il responsabile aeroportuale si accorge che l'ipotesi secondo cui due aeromobili entrano in conflitto soltanto quando utilizzano lo stesso arco spazio-temporale è troppo semplificativa. In particolare, si osserva che alcuni archi spazio-temporali diversi possono rappresentare movimenti che utilizzano contemporaneamente una stessa area critica dell'aeroporto, come un incrocio tra due vie di rullaggio.

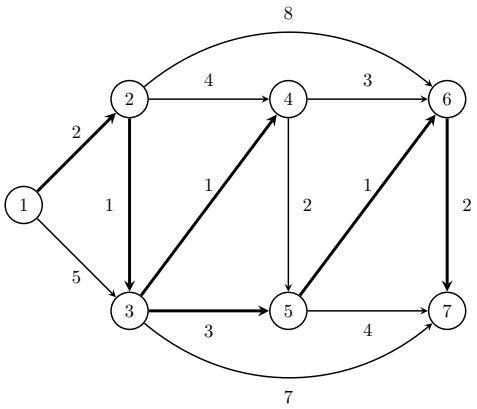
Sia $\mathcal{C}$ l'insieme delle aree critiche e, per ogni $c \in \mathcal{C}$, sia $A_c \subseteq A$ l'insieme degli archi spazio-temporali il cui utilizzo comporta l'occupazione dell'area critica c. Si vuole impedire che due o più aeromobili utilizzino contemporaneamente la stessa area critica. Come cambierebbe la formulazione?

Risposta: il vincolo di capacità sugli archi deve essere affiancato dai seguenti vincoli di capacità sulle aree critiche:

$$\sum_{k\in K}\sum_{a\in A_c} x_{ka} \leq 1 \qquad \forall c \in \mathcal{C}.$$

In questo modo, anche qualora due aeromobili utilizzassero archi spazio-temporali distinti, essi non potrebbero occupare la stessa area critica.

2) Per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 e la corrispondente soluzione (archi evidenziati) mostrati in figura, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

I $d = [0, 2, 3, 4, 6, 7, 9]$ è il vettore delle etichette relativo all'albero

II $d = [0, 2, 1, 1, 3, 1, 2]$ è il vettore delle etichette relativo all'albero

II $d = [0, 2, 5, 6, 8, 10, 13]$ è il vettore delle etichette relativo all'albero

B Quali archi, tra quelli elencati, non soddisfano le condizioni di Bellman?

I $(3, 4)$ II $(4, 6)$ III Nessuna delle precedenti

C Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano strettamente le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(1, 3), (2, 4)\}$ II $\{(4, 5), (4, 6)\}$ III $\{(1, 3), (2, 4), (5, 7)\}$

D Qual è il costo dell'albero dei cammini minimi?

I 29 II 31 III 34

E Si consideri l'albero dei cammini minimi mostrato in figura. Si vuole modificare il costo del minor numero possibile di archi fuori dall'albero affinché quello dato sia l'unico albero dei cammini minimi.

Individuare gli archi il cui costo deve essere modificato e specificare le condizioni che devono essere soddisfatte dai nuovi costi. Giustificare la risposta.

Risposta:

Le etichette dei nodi relative all'albero mostrato sono:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 2, \quad d_3 = 3, \quad d_4 = 4, \quad d_5 = 6, \quad d_6 = 7, \quad d_7 = 9.$$

Pertanto

$$d = [0, 2, 3, 4, 6, 7, 9].$$

Il costo dell'albero dei cammini minimi, secondo la convenzione adottata, è la somma delle etichette dei nodi:

$$\sum_{i \in N} d_i = 0 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 = 31.$$

Consideriamo ora le condizioni di Bellman per gli archi fuori dall'albero:

$$d_j \leq d_i + c_{ij}.$$

Per l'arco $(1, 3)$:

$$3 \leq 0 + 5,$$

quindi la condizione è stretta.
Per l'arco $(2, 4)$:

$$4 \leq 2 + 4,$$

quindi la condizione è stretta.
Per l'arco $(4, 5)$:

$$6 \leq 4 + 2,$$

con uguaglianza.
Per l'arco $(4, 6)$:

$$7 \leq 4 + 3,$$

con uguaglianza.
Per l'arco $(5, 7)$:

$$9 \leq 6 + 4,$$

quindi la condizione è stretta.
Per l'arco $(2, 6)$:

$$7 \leq 2 + 8,$$

quindi la condizione è stretta.
Per l'arco $(3, 7)$:

$$9 \leq 3 + 7,$$

quindi la condizione è stretta.
Pertanto gli archi che non soddisfano strettamente le condizioni di Bellman sono

$$\boxed{(4, 5), (4, 6)}.$$

L'arco $(4, 5)$ può sostituire l'arco $(3, 5)$ poiché

$$d_4 + c_{45} = 4 + 2 = 6 = d_5.$$

Pertanto si ottiene un altro albero dei cammini minimi.

Infine, affinché l'albero dato sia l'unico albero dei cammini minimi, tutte le condizioni di Bellman relative agli archi fuori dall'albero devono essere soddisfatte strettamente.
È quindi necessario modificare almeno gli archi $(4, 5)$ e $(4, 6)$, imponendo rispettivamente

$$c_{45} > d_5 - d_4 = 2$$

e

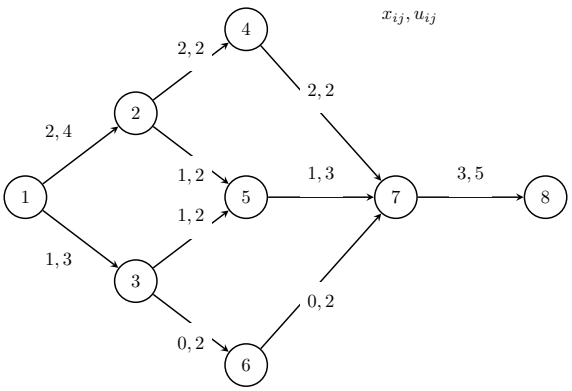
$$c_{46} > d_6 - d_4 = 3.$$

Ad esempio, ponendo

$$c_{45} = 3, \qquad c_{46} = 4,$$

le condizioni diventano strette e l'albero mostrato diventa l'unico albero dei cammini minimi.

3) Per il problema del flusso massimo dal nodo $s = 1$ al nodo $t = 8$ ed il corrispondente flusso mostrati in figura, dove, per ogni arco, il primo valore rappresenta il flusso attuale e il secondo valore la capacità, si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Il flusso mostrato in figura è:

I ammissibile di valore 2 II ammissibile di valore 3 III non ammissibile

B Ponendo il flusso $x_{25} = 0$ si ottiene:

I un flusso ammissibile ma non ottimo II un flusso inammissibile III il flusso ottimo

C Considerando il flusso ammissibile ottenuto in uno dei punto precedenti, quale delle seguenti affermazioni è vera?

I $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8$ non è un cammino aumentante
II $1 \to 2 \to 4 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante
III $1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante

D Considerando il flusso ammissibile ottenuto in uno dei punto precedenti, quale delle seguenti affermazioni è vera?

I $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante con capacità $\theta = 0$
II $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante con capacità $\theta = 2$
III $1 \to 2 \to 4 \to 7 \to 8$ è un cammino aumentante con capacità $\theta = 2$

E Quale dei seguenti tagli mostra che il flusso massimo non può essere superiore a 5?

I $N_s = \{1\}$ II $N_t = \{8\}$ III $N_s = \{1, 2, 3\}$

F Quale delle seguenti è una numerazione topologica dei nodi del grafo?

I $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ II $[1, 3, 2, 6, 5, 4, 7, 8]$ III entrambe le precedenti

Quindi:

G Si esegua l'algoritmo di Edmonds–Karp partendo dal flusso ottenuto al punto B. Qual è il valore del flusso ottimo? Mostrare tutti i passaggi e giustificare tutte le risposte.

Risposta:

Il flusso iniziale mostrato in figura non è ammissibile. In particolare, considerando il nodo 2, il flusso entrante è pari a $x_{12} = 2$, mentre il flusso uscente è $x_{24} + x_{25} = 2 + 1 = 3$. Il principio di conservazione del flusso è quindi violato. Ponendo $x_{25} = 0$, il flusso entrante e uscente dal nodo 2 diventano entrambi pari a 2. Anche il nodo 5 rispetta la conservazione del flusso, poiché il flusso entrante è $x_{25} + x_{35} = 0 + 1 = 1$ e quello uscente è $x_{57} = 1$.

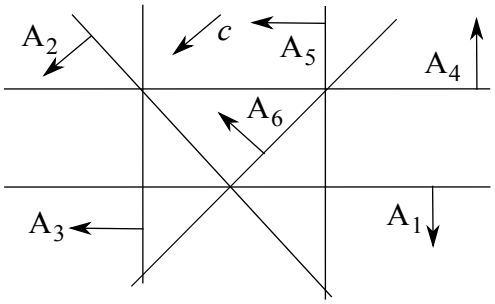
Il flusso ottenuto è quindi ammissibile e ha valore $v = x_{12} + x_{13} = 2 + 1 = 3$. Tale flusso non è però massimo, come si può verificare costruendo il grafo residuo. Nel grafo residuo è presente, ad esempio, il cammino aumentante $1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8$, con capacità $\theta = \min\{2, 2, 2, 2\} = 2$. Aumentando il flusso di $\theta = 2$ lungo tale cammino si ottiene un flusso di valore $3 + 2 = 5$.

Il nuovo flusso soddisfa i vincoli di capacità e di conservazione. Nel grafo residuo corrispondente non esistono ulteriori cammini aumentanti dal nodo 1 al nodo 8. Il flusso ottenuto è pertanto massimo. Il valore del flusso massimo è quindi $v^* = 5$.

È inoltre possibile verificare l'ottimalità tramite il teorema flusso massimo–taglio minimo. Considerando il taglio $N_t = \{8\}$, la capacità del taglio è pari alla capacità dell'unico arco che entra nel nodo 8: $C(N_s, N_t) = u_{78} = 5$.

Poiché abbiamo trovato un flusso ammissibile di valore 5 e un taglio di capacità 5, per il teorema del flusso massimo–taglio minimo il flusso trovato è massimo.

4) Si consideri l'applicazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, per via geometrica, al problema di *PL* rappresentato nella figura qui accanto. Si noti che c e A_2 sono collineari tra loro, ed anche A_1 ed A_4 , e A_3 ed A_5 rispettivamente lo sono. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Per $B = \{4, 6\}$ si può afferare che

I è una base primale degenere II è una base duale non ammissibile III entrambe le cose

B Per $B = \{1, 3\}$ si può affermare che

I non è una base II è una base primale degenere III è una base primale non ammissibile

C Per $B = \{4, 5\}$ si può affermare che

I è una base primale degenere II è una base duale degenere III nessuna delle due cose

D Per $B = \{1, 4\}$ si può affermare che

I non è una base II è una base duale ammissibile III è una base primale degenere

E Per $B = \{4, 5\}$, l'indice uscente è

I $h = 4$ II $h = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

F Per $B = \{4, 6\}$, l'indice uscente è

I $h = 4$ II $h = 6$ III nessuno (l'algoritmo termina)

G Per $B = \{4, 6\}$, dato l'indice uscente stabilito alla domanda precedente, l'indice entrante è

I $k = 1$ II $k = 5$ III nessuno (l'algoritmo termina)

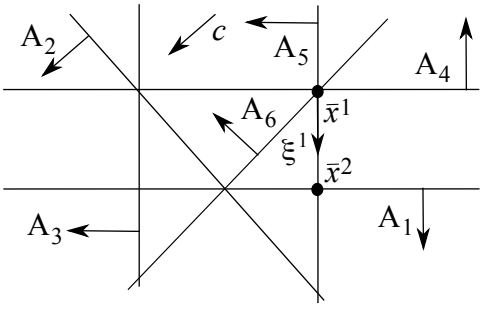
H Se la base corrente è $B = \{5, 6\}$, la direzione $\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)}$ per $h = 5$ è

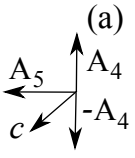
I ammissibile II di crescita III nessuna delle due cose

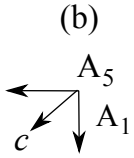
I Si descriva l'esecuzione dell'algoritmo a partire dalla base $B = \{4, 5\}$, discutendo tutti i passi effettuati e giustificando geometricamente tutte le risposte.

Risposta: Per $B = \{4, 5\}$, la soluzione primale di base $\bar{x}^1$ è mostrata direttamente nella figura sotto, e corrisponde all'intersezione dei vincoli 4 e 5. B è primal ammissibile e degenere, ma non duale ammissibile. Poiché $c \in cono(-A_4, A_5)$, come mostrato in (a) sotto, si ha $\bar{y}_4 < 0$ ed $\bar{y}_5 > 0$, da cui $h = 4$ (si veda F). Si determina la direzione ξ^1 mostrata in figura (interna alla frontiera del vincolo 6, che rimane in base, e si allontana dalla frontiera del vincolo 4). La direzione è di crescita (forma un angolo minore di 90 gradi con c) e ammissibile. Il massimo passo lungo ξ^1 che può essere fatto senza violare i vincoli si ha in corrispondenza del vincolo $k = 1$, che entrerà in base (si veda G).

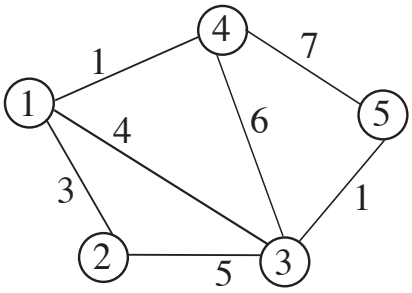
Alla seconda iterazione si ha quindi $B = \{1, 5\}$. La soluzione primale di base $\bar{x}^2$ è nell'intersezione delle frontiere dei vincoli 1 e 5. B è duale ammissibile: infatti $c \in cono(\{A_1, A_5\})$, come mostrato in (b): pertanto $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale.







5) Si considerino il problema del ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo di destra ed il seguente metodo "Branch and Bound": l'euristica è l'algoritmo del "vicino più vicino" (nearest neighbour) a partire dal nodo 5 ed è applicata solamente al nodo radice, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita selezionando un vertice con più di due lati incidenti nell'1-albero (se ve n'è più di uno quello col minor numero di lati incidenti, ed a parità di questo quello col nome più piccolo) e fissando in ciascun figlio uno di tali lati come non appartenente al ciclo, e l'albero delle decisioni è visitato in ampiezza. I figli di ogni nodo nell'albero delle decisioni vengono visitati in ordine lessicografico crescente dei corrispondenti archi fissati a zero (ad esempio, il nodo corrispondente a fissare a zero $\{1, 2\}$ viene visitato prima di quello corrispondente a $\{1, 3\}$). Si risponda alle seguenti domande. **Non rispondere ad una domanda, tranne a quella aperta, equivale ad una risposta sbagliata e quindi ad una penalità.**



A Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I il lato $\{3, 5\}$ appartiene al ciclo Hamiltoniano calcolato dall'euristica.

II l'1-albero di costo minimo calcolato al nodo radice non è un ciclo Hamiltoniano.

III entrambe le precedenti sono false.

B Quali sono le valutazioni inferiore $\underline{z}$ e superiore $\overline{z}$ al nodo radice?

I $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = +\infty$ II $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = 14$ III nessuna delle precedenti

C Su quali variabili l'algoritmo ramifica al nodo radice?

I x_{12}, x_{13}, x_{14} II x_{13}, x_{23}, x_{35} III nessuna (l'algoritmo termina)

D Si consideri l'esecuzione dell'algoritmo dopo aver visitato il nodo radice ed i suoi figli. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

I nessun nodo viene chiuso per ottimalità

II almeno un nodo viene chiuso per inammissibilità

III entrambe le precedenti sono vere

E Quali sono le migliori valutazioni inferiore e superiore dopo aver visitato il nodo radice ed i suoi figli?

I $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = +\infty$ II $\underline{z} = 14$, $\overline{z} = 14$ III $\underline{z} = 13$, $\overline{z} = 18$

F Si aggiunga il lato $\{2, 5\}$. È possibile fissare il suo costo affinché sia strettamente maggiore di 4 e l'algoritmo termini con una soluzione ottima al nodo radice?

Risposta: Indipendentemente dal costo c_{25}, la soluzione parziale (MST) ottenuta dal rilassamento dell'1-albero di costo minimo calcolata al nodo radice sarebbe $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 5\}\}$, in cui il nodo 1 ha già tre lati incidenti, pertanto l'1-albero al nodo radice non potrebbe mai coincidere con un ciclo Hamiltoniano, quindi non esiste alcun valore $c_{25} > 4$ per cui l'algoritmo termini al nodo radice.