Compito di MDAL

2 Febbraio 2017

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere a matita. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1.

Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a. Si trovi un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonale a v_1 e v_2.

b. Si trovi una base ortogonale (q_1, q_2) di $V = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

c. Si completi q_1, q_2 a una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

a. $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ deve soddisfare $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$$\text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -8x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$v = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (o anche $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, visto che non l'abbiamo escluso)

(o un suo multiplo)

b. $q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3} v_1$ (Gram-Schmidt)

$$q_2 = v_2 - q_1 q_1^* v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

Un qualunque multiplo di q_2 va bene (abbiamo chiesto solo <u>ortogonale</u>, normalizzare non è necessario).

c. Il vettore v è ortogonale a v_1, v_2 e quindi anche a $q_2 = v_2 - \frac{2}{3} v_1$. Pertanto i vettori $\{q_1, q_2, v\}$ sono ortogonali. Sono anche linearmente indipendenti (ortogonale $\Rightarrow$ lin. indipendente), quindi sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.
Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta.

a. Si trovi una matrice 2×2 a coefficienti reali che non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ma è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

b. Si trovi una matrice 2×2 a coefficienti reali tale che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sia un suo autovettore di autovalore $\lambda_1 = 5$.

c. Esiste una matrice 3×3 a coefficienti reali con un autovalore $\lambda_1 = 5$ di molteplicità geometrica 2 e un autovalore $\lambda_2 = 4$ anch'esso di molteplicità geometrica 2?

a. Basta trovare una matrice il cui polinomio caratteristico abbia due radici complesse distinte e non reali.

Per esempio, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A - xI) = x^2 + 1$

Ha due soluzioni $x_{1,2} = \pm i$. È diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ perché matrici con autovalori distinti sono diagonalizzabili.
(Non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ perché non ha tutti gli autovalori reali.)

b) Va bene qualunque matrice B tale che $B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Quindi $\begin{bmatrix} a & 5-a \\ b & 5-b \end{bmatrix}$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Per esempio,

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ o $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

c) No, perché $m_a(5) \geq m_g(5) = 2$ e $m_a(4) \geq m_g(4) = 2$, ma la somma delle molteplicità algebriche di tutti gli autovalori è pari alla dimensione, cioè 3, quindi non è possibile avere due autovalori con $m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) \geq 3$.